Réduction (1re partie)

- Méthodes générales :
  - Regarder ce qui se passe en petite dimension (2 ou 3) permet parfois d'éclairer les choses.
  - Pour les endomorphismes, une base bien adaptée au problème permet de le transformer en un problème simple. C'est le cas aussi si l'espace se décompose en somme directe de sous-espaces simples.
  - En travaillant avec des matrices dans $\mathbb{R}$, passer dans $\mathbb{C}$ permet d'avoir des propriétés intéressantes (pour trigonaliser par exemple).
- Détermination des éléments propres :
  - Le polynôme caractéristique sert à déterminer les valeurs propres : il faut donc en donner une forme la plus factorisée possible. Si l'on calcule celui-ci par une méthode du pivot de Gauss en travaillant sur les lignes, les mêmes opérations permettent de déterminer les sous-espaces propres.
  - Lorsqu'une matrice se présente par blocs, on aura souvent intérêt à chercher les vecteurs propres par blocs : pour résoudre $AX=\lambda X$ où $A=\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$, on écrira $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.
- Diagonalisabilité :
  - Avoir n valeurs propres distinctes en dimension n suffit.
  - On peut ajouter les dimensions des sous-espaces propres (multiplicités géométriques) et comparer à la dimension de l'espace.
  - Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, il y a diagonalisabilité si et seulement si les dimensions de chaque sous-espace propre sont égales aux multiplicités des valeurs propres.
  - On verra plus tard qu'une matrice symétrique **réelle** est automatiquement diagonalisable.
  - Savoir diagonaliser complètement en petite dimension, et savoir en déduire puissance de matrice, terme général de suites récurrentes, commutant.
- Trigonalisation :
  - Sur $\mathbb{C}$, c'est automatique. On effectue assez rarement des calculs explicites de trigonalisation.
  - Mais le fait que toute matrice complexe soit trigonalisable est d'usage courant.
- Comme les sous-espaces propres sont toujours en somme directe, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre. Pratique !

Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

1 Montrer que tout projection peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que toute symétrie peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

2 Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer le rang de $M=\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$.
2. Calculer l'inverse de M lorsque c'est possible.

3 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Soit $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y+2z=0\}$. Montrer que H est stable par u.
2. Soit $x=(3,2,1)$ et $D=\mathrm{Vect}(x)$. Montrer que D est stable par u.
3. Justifier que $\mathbb{R}^3=D\oplus H$.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans la quelle la matrice de u est diagonale par blocs, à cœfficients entiers.

4 Montrer $\left(x\mapsto e^{\lambda x}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille libre.

5 **CCINP 83 : valeur propre de composée**

6 Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A et $A^\intercal$ ont même polynôme caractéristique.

7 Montrer qu'en dimension impaire, un matrice réelle a toujours au moins une valeur propre réelle.

8 **CCINP 72 : endomorphismes de rang 0 ou 1**

9 Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre ?

10 Diagonaliser $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

11 **CCINP 67 : diagonalisation dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$**

12 **CCINP 59 : Endomorphisme de polynômes**

13 **CCINP 69 : Rang et diagonalisabilité**

14 **CCINP 70 : réduction de matrice circulante**

15 **Matrices compagnes** Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagne $(a_0,\dots,a_{n-1} \in \mathbb{K})$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Vérifier que ses sous-espaces propres sont des droites puis montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé simple.

16 Trouver le terme général des suites x, y, z telles que pour tout n, $\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$

17 Trouver le commutant de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

18 **CCINP 73 : Commutant d'une matrice** 2×2

19 Trouver les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

20 Déterminer le terme général des suites complexes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$ en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

21 $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?
2. Trigonaliser (resp. diagonaliser) A si elle est trigonalisable (resp. diagonalisable).

2. Éléments propres et diagonalisation

22

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2 - 7a & a - 7 & a \end{pmatrix}$ admet-elle une valeur propre double ? Pour ces valeurs, A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

23 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le terme général des suites x, y, z définies par $x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} &= x_n - z_n \\ z_{n+1} &= 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$

24 Quelles sont les matrices élémentaires $E_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables ?

25 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

26 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que tout vecteur non nul x soit un vecteur propre. Que dire de u ?

27 Déterminer le commutant et les racines carrées de la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 10 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

28 Montrer que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $A^\intercal$ l'est.

29 Déterminer les valeurs propres de la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix}$

30 On souhaite démontrer que si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Montrer le résultat si on suppose de plus que $A \in \mathscr{GL}(\mathbb{K})$.
2. En déduire le résultat si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en utilisant l'exercice suivant.
3. Retrouver le résultat dans le cas général en calculant le produit dans les deux sens de $\begin{pmatrix} A & XI_n \\ I_n & (0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -B & XI_n \\ I_n & -A \end{pmatrix}$.

31 **Densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$** Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$ suffisamment proche de 0, $A - \lambda I_n \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$. En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ au sens où $A^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} A$ lorsque pour tout (i, j), $a_{i,j}^{(k)} \to a_{i,j}$.

Retrouver le résultat en exploitant le fait que tout matrice de rang r est équivalente à J_r.

32 **Matrices circulantes** Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et la diagonaliser.
2. En déduire la déterminant dit circulant $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

33 **Matrices de rang 1**

1. Montrer que $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme $X\,Y^{\intercal}$ où X, Y sont des colonnes non nulles de taille à déterminer. Comment s'exprime sa trace en fonction de X et Y ?
2. On suppose que $p = q$. Donner, suivant les valeurs de sa trace, les valeurs propres de A. Donner une CNS pour que A soit diagonalisable.

34 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer, sans calculer son polynôme caractéristique, les valeurs propres de la matrice A.
2. Démontrer, sans déterminer ses sous-espaces propres, que A n'est pas diagonalisable.
3. Justifier que A est trigonalisable, puis trigonaliser A.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

35 **Théorème de Gerschgorin** En utilisant le résultat d'inversibilité des matrices à diagonale strictement dominante ($\forall\, i,\ \left|a_{i,i}\right| > \sum_{j \neq i} \left|a_{i,j}\right|$) ou le principe de sa démonstration, montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, chaque valeur propre complexe de A se trouve dans un disque de Gerschgorin de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} \left|a_{i,j}\right|$.

Donner pour chaque valeur propre un disque de centre 0 dans lequel elle se trouve.

3. Trigonalisation

36 **CCINP** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer le polynôme caractéristique de A puis déterminer une matrice de passage rendant la matrice A semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

37 **CCINP : convolution** Pour $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit

$$A \star B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n^2}(B).$$

1. Montrer que si $A, A', B, B' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors $(A \star B)(A' \star B') = (AA') \star (BB')$.
2. En déduire que $A \star B$ est inversible si et seulement si A et B le sont.
3. Déterminer le spectre de $A \star B$.
4. En déduire le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de $A \star B$.

38 **Très classique : trigonalisation simultaneé** On suppose que le corps de base est $\mathbb{C}$ et u et v sont deux endomorphismes qui commutent. Démontrer qu'ils ont au moins un vecteur propre commun.

Utiliser ce résultat pour démontrer que u et v sont simultanément trigonalisables.

39 ✦ **Centrale**

1. Soient $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $B \in \mathbb{K}[A]$ ou $A \in \mathbb{K}[B]$.
2. Le résultat subsiste-t-il dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$?

40 ★ **Centrale-Mines Ponts** Montrer que $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ont même polynôme caractéristique si et seulement si

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \ \operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k.$$

41 ✶ **X** Soit $A \in \mathscr{M}_n(X)$ telle que $\operatorname{tr} A^m \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$.

Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module < 1.

4. Réduction par blocs

42 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 3B & B \\ -2B & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. En déduire que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que si B est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

43 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit diagonalisable.

44 Soit A, B matrices carrées d'ordre p et q respectivement. On définit par blocs la matrice $M=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est diagonalisable (respectivement trigonalisable) si A et B le sont.
2. Soit C à p lignes et q colonnes, $N=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B\end{pmatrix}$.
   On suppose que A et B sont diagonalisables et n'ont aucune valeur propre commune. Montrer que N est diagonalisable et semblable à M. Préciser les sous-espaces propres de N.

5. Matrices et endomorphismes nilpotents

45 Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables ?

46 Soit $n\in\mathbb{N}$ et $u:\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P'\end{array}\right.$.

1. Montrer que u est un endomorphisme nilpotent et donner son indice de nilpotence.
2. Écrire la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

47 Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}$.

Montrer que u est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

48 Montrer que sur $\mathbb{C}$, une matrice est nilpotente si et seulement si 0 est sa seule valeur propre. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{R}$?

49 **Commutant d'un endomorphisme nilpotent** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 2$, et $u\in\mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

1. Montrer qu'il existe $a\in E$ tel que $\mathscr{B}=\big(a,u(a),\dots,u^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.
2. Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'=\big(u^{n-1}(a),\dots,u(a),a\big)$.
3. Soit $v\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que $u\circ v=v\circ u$ si et seulement si $v\in\big(\mathrm{id}_E,u,\dots,u^{n-1}\big)$.
   Indication : on pourra introduire les coordonnées de $v(a)$ dans la base $\mathscr{B}$.

50 **Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fin $n\geqslant 2$ et $u\in\mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $a\in E$ tel que $u^{p-1}(a)\neq 0$.
2. Démontrer que $\mathscr{F}=\big(a,u(a),\dots,u^{p-1}(a)\big)$ est une famille libre de E.
3. Retrouver le fait que $p\leqslant n$
4. Dans cette question, on suppose que $p=n$.
   (a) Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\dim\operatorname{Ker} u^k=k$.
   (c) Soit F sous-espace de E stable par u de dimension $k\geqslant 1$. En considérant l'endomorphisme u_F induit par u sur F, montrer que $F=\operatorname{Ker} u^k$.

51 ✦ **Mines-Ponts** Montrer que $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\operatorname{tr} A^k=0$.

52 ★ Soit N une matrice carrée d'ordre n nilpotente.

1. Montrer que I_n-N et I_n+N sont inversibles et calculer leurs inverses en fonction de N.
2. En considérant le développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, déterminer une matrice M dont le carré est égal à I_n+N.
   (On pourra montrer que si P est un polynôme tel que $P(x)=\underset{x\to 0}{o}(x^n)$, alors il existe Q tel que $P=X^nQ$ à l'aide d'une division euclidienne.)