Polynômes, fractions rationnelles

1. Exercices vus en cours

1 Montrer que tout polynôme réel de degré impair possède au moins une racine réelle.

2 **CCINP 85 – Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine**

3 **CCINP 87 – Interpolation de Lagrange**

4 **CCINP 90 – Interpolation de Lagrange**

5 Soit $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ et $B = X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2$.

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer $D = A \wedge B$.
2. En déduire $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $AU + BV = D$.

6 Décomposer en produit d'irréductibles les polynômes $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

7 Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{(X-1)(X+2)}$, $\dfrac{1}{X^n - 1}$, $\dfrac{2X+1}{X^3 - 2X^2 + X}$, $\dfrac{X}{(X^2-1)^2}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

8 Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^3 - 1}{X^3 + X}$ et $\dfrac{2X^2}{(X^2+1)^3}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

9 Calculer $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{2 - \omega}$.

2. Polynômes

10 Montrer que $(X-1)^3$ divise $nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$.

11 Soit $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ tel que $a\neq b$. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$? Que devient-il si $a=b$?

12 **Polynômes de Tchebychev** [1]

1. Pour $n\in\{0,1,2\}$, déterminer un polynôme P_n tel que $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \ \cos(nx)=\widetilde{P_n}(\cos x)$.
2. Démontrer qu'un tel polynôme existe pour tout $n\in\mathbb{N}$ et donner une relation de récurrence liant P_{n+1},P_n et P_{n-1}. Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de P_n.
3. Quelles sont les racines de P_n ?

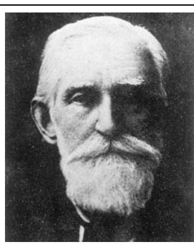
13 **Polynômes de Legendre** [2] On considère pour $n\in\mathbb{N}$, le polynôme

$$L_n=\frac{\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}}{2^n n!}.$$

1. Déterminer le degré et le cœfficient dominant de L_n.
2. Soit $P_n=(X^2-1)^n$. Montrer que $(X^2-1)P_n'=2nXP_n$. En déduire une relation entre L_n,L_n' et L_n''.
3. Montrer que L_n est scindé à racines simples toutes dans $]-1,1[$.

14 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$

---

1. 

Pafnouti Lvovitch Tchebychev (Russie, 1821 - 1894) est un mathématicien russe. Il est connu pour ses travaux dans le domaine des probabilités et des statistiques. En théorie des nombres, Tchebychev découvre des résultats sur la répartition des nombres premiers. Les polynômes de Tchebychev sont très classiques en classe prépa.

2. 

Adrien Marie Legendre (Paris 1752 - 1833) Pour les opérations géodésiques organisées par les observatoires de Paris et de Greenwich, il élabora de nombreux résultats de trigonométrie. Ses Éléments de géométrie (1794) se sont imposés pendant plus d'un siècle dans l'enseignement secondaire. Dans la Théorie des nombres (1798), il énonça la loi de distribution des nombres premiers et formula algébriquement la loi de réciprocité des résidus quadratiques, démontrée par Gauss. Sa classification des intégrales elliptiques en trois espèces distinctes prépare les travaux d'Abel et de Jacobi.

15 Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à cœfficients dans $\mathbb{Z}$. Démontrer que si $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible racine de P alors p divise a_0 et q divise a_n.

Exemples : déterminer les racines rationnelles de $6X^4-11X^3-X^2-4$.

16 Soit $A=X^3-3X+1$.

1. A est-il irréductible dans $\mathbb{C}[X]$? dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{Q}[X]$?
2. A est-il scindé sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{Q}$?

17

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les racines d'un polynôme pour qu'il soit scindé à racines simples.
2. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé simple avec $\deg P \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé simple. Comparer les moyennes arithmétiques des racines de P et de P'.
3. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{C}[X]$?
4. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé avec $\deg P \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé.

18 Quel est le reste de la division euclidienne de $X^{2n+1}+(X+1)^{n+2}$ par X^2+X+1, où $n\in\mathbb{N}$?

Solution de 18 :

Les racines de X^2+X+1 sont...

Réponse :

n [6]	0	1	2	3	4	5
R	$2X$	0	$-2X-2$	0	2	0

19 Factoriser sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes X^4+X^2+1 et $(X^2-X+1)^2+1$.

Solution de 19 :

Réponses :

- $X^4+X^2+1=\left(X^2-X+1\right)\left(X^2+X+1\right)$
- $(X^2-X+1)^2+1=\left(X^2+1\right)\left(X^2-2X+2\right)$

20 Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $P_n=\dfrac{(X+\mathrm{i})^{2n+1}-(X-\mathrm{i})^{2n+1}}{2\mathrm{i}}$.

1. Montrer que P_n est un polynôme à cœfficients réels. Quel est son degré et son cœfficient dominant ?
2. Déterminer les racines de P_n. En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de P_n sur $\mathbb{R}[X]$.

3. Montrer qu'il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n = Q_n(X^2)$. Quel est le degré et le cœfficient dominant de Q_n ? Trouver les racines de Q_n.
4. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ puis $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$.
5. Montrer que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.
6. En déduire la limite de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

21 **Théorème de Bezout [3] avec degrés** Soient A et B deux polynômes non constants premiers entre eux. Montrer qu'il existe un unique couple de polynômes (U,V) tel que $AU + BV = 1$ avec $\deg U < \deg B$ et $\deg V < \deg A$.

Indication : $\deg AU = \deg BV$. *Utiliser le lemme de Gauß.*

Solution de 21 : Théorème de Bezout [4] avec degrés

Unicité si $AU_1 + BV_1 = AU_2 + BV_2$ avec $\deg U_1 < \deg B$, $\deg V_1 < \deg A$, $\deg U_2 < \deg B$ et $\deg V_2 < \deg A$, alors

$$A(U_1 - U_2) = B(V_1 - V_2)$$

donc A divise $B(V_1 - V_2)$ et est premier avec B donc divise $V_1 - V_2$ par le lemme de Gauß. Ce dernier étant de degré strictement inférieur à celui de A, on en déduit que $V_1 = V_2$, puis enfin que $U_1 = U_2$.

Existence on part d'une relation de Bézout $AU_1 + BV_1 = 1$.

Par division euclidienne, on a $Q, U \in \mathbb{K}[X]$ tel que $U_1 = BQ + U$ avec $\deg U < \deg B$.

Alors $AU + B(QA + V_1) = 1$. On pose $V = QA + V_1$. Il reste à voir que $\deg V < \deg A$.

Or $AU + BV = 1$ donc $AU = 1 - BV$ avec $0 = \deg 1 < \deg BV$ car V n'est pas nul (sinon A serait constant) et B ne l'est pas non plus.

Donc $\deg AU = \deg BV$ ce qui donne finalement $\deg V = \deg A + \deg U - \deg B < \deg A$.

22 Soient a et b deux entiers naturels dont le pgcd est d. Montrer que le pgcd de $X^a - 1$ et $X^b - 1$ est $X^d - 1$.

Solution de 22 :

---

3.  **Étienne Bezout** (Nemours 1730 - Avon 1783) Éminent mathématicien, adjoint mécanicien à l'Académie des sciences en mars 1758, il fut nommé en 1763 professeur et examinateur des gardes-marine et composa pour eux un Cours de mathématiques en 4 volumes. Membre de l'Académie de marine, il est l'auteur de nombreux ouvrages dont un Traité de navigation (1769) et une Théorie générale des équations algébriques (1779). Bézout contribua beaucoup à orienter dans un sens mathématique la formation des jeunes officiers pour les rendre aptes aux calculs astronomiques les plus savants. Un tel système, où la théorie l'emportait trop souvent sur la pratique, contrairement à ce qui se faisait en Angleterre, provoqua d'assez vives polémiques.

Première méthode Appliquer l'algorithme d'Euclide à a et b (si $b \neq 0$).

$a = bq + r$ avec $r < b$.

Donc

$$\begin{aligned} X^a - 1 &= X^{bq+r} - 1 \\ &= \left(X^b\right)^q \cdot X^r - 1 \\ &= \left(\left(X^b\right)^q - 1 + 1\right) \cdot X^r - 1 \\ &= \left(\left(X^b\right)^q - 1^q\right) \cdot X^r + X^r - 1 \\ &= (X^b - 1) \cdot P \cdot X^r + X^r - 1 \end{aligned}$$

avec $\deg X^r - 1 = r < b = \deg X^b - 1$.

Le reste de la div. euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$ est $X^r - 1$:

$$X^a - 1 \wedge X^b - 1 = X^b - 1 \wedge X^r - 1$$

Les algorithmes d'Euclide s'écrivent de la même manière pour les entiers et les polynômes.

Dernier reste non nul ?

$$X^a - 1 \wedge X^b - 1 = X^d - 1 \wedge X^0 - 1 = X^d - 1.$$

Si $b = 0$, $(X^a - 1) \wedge \left(X^b - 1\right) = (X^a - 1) \wedge 0 = X^a - 1 = X^d - 1$.

Deuxième méthode Racines complexes

Racines communes de $X^a - 1$ et $X^b - 1$? But : celles de $X^d - 1$.

- Si $z \in \mathbb{C}$ racine de $X^d - 1$ ie $z^d = 1$, alors $z^a = 1$ et $z^b = 1$. On a a', b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.
  Alors $z^a = \left(z^d\right)^{a'} = 1^{a'} = 1$. et idem pour $z^b = 1$.
- Si z racine commune,
  on a $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = d$.
  $z^d = z^{au+bv} = (z^a)^u \left(z^b\right)^v = 1$.

Or toutes ces racines sont simples (connu) dans $X^a - 1$ et $X^b - 1$ donc dans le pgcd et aussi dans $X^d - 1$ et tous les polynômes sont unitaires (dont LE pgcd) donc $X^a - 1 \wedge X^b - 1 = X^d - 1$.

Remarque : la deuxième méthode fonctionne aussi pour montrer

$$(2^a - 1) \wedge \left(2^b - 1\right) = \left(2^d - 1\right).$$

3. Fractions rationnelles

23 Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Solution de 23 :
Décomposition en éléments simples.

24

Calculer la dérivée d'ordre n de $\dfrac{1}{X(X^2-1)}$.

Solution de 24 :

$$\left(\frac{1}{X(X^2-1)}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{X^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2(X+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2(X-1)^{n+1}}.$$

25

Décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{C}(X)$, $\dfrac{X^{n+1}}{X^n-1}$.

Solution de 25 :

$$\frac{X^{n+1}}{X^n-1} = X + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^2}{X-\omega_k}.$$

26

Soient x_i, pour $i \in [\![1,4]\!]$, les quatre racines complexes de X^4-X+1. Calculer les sommes $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{x_i^2-1}$ et $T = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{(x_i-1)^2}$.

Solution de 26 :
Décomposer en éléments simple puis se ramener à $\dfrac{P'}{P}$ pour S. Pour T, quelle opération algébrique permet de faire apparaître un carré au dénominateur ?

Réponses :
$S = -\dfrac{1}{2}\dfrac{P'}{P}(1) + \dfrac{1}{2}\dfrac{P'}{P}(-1) = -\dfrac{2}{3}$.
$T = -\left(\dfrac{P'}{P}\right)'(1) = -3$.

27

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $x_1, \dots, x_n$.

Décomposer en éléments simples $\dfrac{P''}{P}$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$.

Solution de 27 :

$\dfrac{P''}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X-x_k}$ avec $\lambda_k = \dfrac{P''(x_k)}{P'(x_k)}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$ est le cœfficient en X^{n-1} dans P'' : il est nul.

28 Théorème de Gauss-Lucas

Soit P un polynôme de degré au moins 2 de $\mathbb{C}[X]$. Démontrer que les racines de P' se trouvent dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire sont des barycentres à cœfficients positifs de celles-ci, soit encore des combinaisons linéaires à cœfficients positifs de somme 1.

On pourra s'intéresser à $\dfrac{P'}{P}$.

Solution de 28 : Théorème de Gauss-Lucas

Quantité conjuguée....

$$0=\sum\lambda_k(z-x_k) \text{ avec } \lambda_k=\frac{1}{|z-x_k|^2}.$$

4. Compléments

29 $\mathbb{K}[X]$ **est nœthérien** Soit (I_n) une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K}$ est un corps. Démontrer que la suite (I_n) est stationnaire.

Est-ce encore vrai sur $\mathbb{Z}$?

Solution de 29 : $\mathbb{K}[X]$ **est nœthérien**

S'il y a une idéal nul, la suite stationne dessus. Sinon, Méthode 1 : Il existe un unique polynôme unitaire P_n tel que $I_n=(P_n)$. De plus, la condition $I_n\subset I_{n+1}$ entraîne que $P_{n+1}|P_n$. La suite $(\deg(P_n))$ est donc une suite d'entiers naturels décroissante : elle est stationnaire. Soit $p\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant p$, on a $\deg P_n=\deg P_p$. On a alors $P_n|P_p$, P_n et P_p sont unitaires et de même degré, donc ils sont égaux et $I_n=I_p$. La suite (I_n) est bien stationnaire.

Méthode 2 : Posons $I=\bigcup_n I_n$. Puisque la suite (I_n) est croissante, il est facile de vérifier que I est un idéal. Il existe $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que $I=(P)$. Mais alors, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $P\in I_N$. On prouve alors que pour tout $n\geqslant N$, on a $I_n=(P)$. En effet, on a $I_n\subset I=(P)$, et $P\in I_N\subset I_n\Rightarrow(P)\subset I_n$.