

## Corrigé du Devoir en Temps Limité n° 3

## Problème : Séries de fonctions d'après Centrale 2009 PC

## Partie I – Préliminaires

## I.A -

I.A.1) On a  $u(n, p) \sim \frac{1}{n^{p+1}}$  avec  $p+1 > 1$  donc par critère de Riemann et comparaison de séries à termes positifs,

la série  $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$  est convergente.

I.A.2)  $\sigma(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0$  par télescopage, donc  $\sigma(1) = 1$ .

I.A.3) Soit  $p \geq 2$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$u(n, p-1) - u(n+1, p-1) = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)} = \frac{p}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}$$

donc  $u(n, p-1) - u(n+1, p-1) = pu(n, p)$ .

I.A.4) Donc, en sommant et télescopant,  $u(1, p-1) - 0 = p\sigma(p)$  et  $\sigma(p) = \frac{1}{p \cdot p!}$ .

I.B - Soient  $q$  un entier  $\geq 2$  et  $N$  un entier naturel  $\geq 1$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^q}$  est continue et décroissante sur  $[1, +\infty[$ , donc,

par comparaison série-intégrale, pour tout  $k \geq N+1$ ,  $\sum_{n=N+1}^k \frac{1}{n^q} \leq \sum_{n=N+1}^k \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^q} = \int_N^k \frac{dt}{t^q} = \frac{1}{1-q} \left( \frac{1}{k^{q-1}} - \frac{1}{N^{q-1}} \right)$ .

En faisant  $k \rightarrow +\infty$ ,  $R(N, q) \leq \frac{1}{(q-1)N^{q-1}}$ .

## Partie II – Séries factorielles

## II.A -

II.A.1) Soit  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) &= \ln\left(\frac{n!}{(n-1)!} \frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)(n+1)^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \frac{1}{n^x}\right) = \ln n - \ln(x+n) + x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) + x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Or  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge en tant que série de Riemann, donc, par comparaison des séries à termes positifs,

$\sum \ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$  est absolument convergente donc convergente.

II.A.2) Ainsi, par télescopage, pour tout  $x > 0$ ,  $\ln(w_n(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha(x) \in \mathbb{R}$  et par continuité de l'exponentielle,

$$w_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\alpha(x)} = \ell(x) \in \mathbb{R}_*^+.$$

**II.B -** D'après la question précédente,  $u_n(x) \sim \ell(x)v_n(x)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Donc les séries à termes positifs de terme général  $|a_n u_n(x)| = |a_n| u_n(x)$  et  $|a_n v_n(x)| = |a_n| v_n(x)$  sont de même nature donc

$$\sum_{n \geq 0} a_n u_n(x) \text{ est absolument convergente si et seulement si } \sum_{n \geq 0} a_n v_n(x) \text{ est absolument convergente.}$$

**II.C -**

II.C.1) Soit  $a > 0$  et  $x \in [a, +\infty[$ . Alors  $|a_n u_n(x)| \leq |a_n| u_n(a)$  majorant indépendant de  $x$  et terme général de série convergente par hypothèse. Donc,  $\|a_n u_n\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq |a_n| u_n(a)$  et par comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum a_n u_n \text{ converge normalement sur } [a, +\infty[.$$

II.C.2)(H1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n u_n$  est continue sur  $]0, +\infty[$

(H2)  $\sum a_n u_n$  converge uniformément au voisinage de tout réel strictement positif car converge normalement sur tout intervalle de la forme  $[a, +\infty[$

donc par théorème de continuité des séries de fonctions,  $f_a$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

II.C.3)(H1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n(x) \sim \frac{n!}{x^{n+1}}$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$  donc  $a_n u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ,

(H2)  $\sum a_n u_n$  converge uniformément au voisinage de  $+\infty$  car converge normalement sur  $[1, +\infty[$

donc par théorème de la double limite,  $f_a(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$ .

**II.D -**

II.D.1) Soit  $a = \left(\frac{1}{n+1}\right)_n$ . Alors, pour tout  $x > 0$ ,  $\sum a_n v_n(x) = \sum \frac{1}{(n+1)^{x+1}}$  est absolument convergente en tant que série de Riemann avec  $x+1 > 1$ , donc vu la question II.B,  $a \in \mathcal{A}$ .

II.D.2)  $a = (1)_n \notin \mathcal{A}$  car  $\sum a_n u_n(1)$  est la série harmonique à termes positifs qui ne converge pas.

**II.E -**

II.E.1) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par opérations et si  $x > 0$ ,

$$\left| \frac{u'_n(x)}{u_n(x)} \right| = |(\ln(u_n))'(x)| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k} \leq \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{x+t} = \frac{1}{x} + \int_0^n \frac{dt}{x+t} = \frac{1}{x} + \ln(x+n) - \ln x = \frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

par comparaison série intégrale, avec  $t \mapsto \frac{1}{x+t}$  décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

$$\text{Donc } |u'_n(x)| \leq u_n(x) \left( \frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) \right).$$

II.E.2)  $\circ$  Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n u_n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_*^+$  d'après la question précédente.

$\circ$  La série de fonctions  $\sum a_n u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_*^+$  car absolument car  $a \in \mathcal{A}$ .

$\circ$  Soit  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_*^+$ . Alors pour tout  $x \in [\alpha, \beta]$ ,

$$|a_n u'_n(x)| \leq |a_n| u_n(\alpha) \left( \frac{1}{\alpha} + \ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) \right) = \frac{|a_n|}{\alpha} u_n(\alpha) + |a_n| \ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) u_n(\alpha)$$

qui ne dépend pas de  $x$ .

Or  $\sum \frac{|a_n|}{\alpha} u_n(\alpha)$  converge car  $a \in \mathcal{A}$  et par II.B, la convergence de  $\sum |a_n| \ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) u_n(\alpha)$  est équivalente

à celle de  $\sum |a_n| \ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) v_n(\alpha) = \sum |a_n| \frac{\ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)}{(n+1)^\alpha}$ . Mais si  $0 < \gamma < \alpha$ , alors par croissances comparées,

$|a_n| \frac{\ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)}{(n+1)^\alpha} = o\left(\frac{|a_n|}{(n+1)^\gamma}\right) = o(|a_n| v_n(\gamma))$  avec  $\sum |a_n| v_n(\gamma)$  qui converge car  $\sum |a_n| u_n(\gamma)$  (toujours par II.B et  $a \in \mathcal{A}$ ), donc, par comparaison des séries à termes positifs,  $\sum |a_n| \ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) v_n(\alpha)$  puis  $\sum |a_n| \ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) u_n(\alpha)$  et enfin  $\sum |a_n| u_n(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} + \ln\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)\right)$  convergent, ce qui assure la convergence normale de  $\sum a_n u_n'$  sur  $[\alpha, \beta]$  (en fait même  $[\alpha, +\infty[$ .)

Finalement, par le théorème admis,  $f_a$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

---

*Fin*