Corrigé du Devoir en Temps Limité n° 3

Exercice 2 : Algèbre linéaire E3A MP 2003

1. (i) $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ est de dimension au plus 1 en tant que sous-espace de $\operatorname{Im} u$ qui est de dimension 1. Donc

   - Soit $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$ et comme avec le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$, $\boxed{E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u.}$
   - Soit $\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u) = 1 = \dim(\operatorname{Im} u)$ donc $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$ c'est-à-dire $\boxed{\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u.}$

   (ii) Soit e un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$. Alors (e) est une famiile libre et le théorème de la base incomplète nous assure de $\boxed{\text{l'existence d'une base de } E \text{ dont le premier vecteur est } e.}$ Notons-la $\mathscr{B} = (e, e_2, \dots, e_n)$
   On suppose que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.On a alors $u(e) = 0_E$ et pour $k \in [\![2, n]\!]$, $u(e_k) \in \operatorname{Im} u = \operatorname{Vect} e$ donc on a $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que $u(e_k) = \lambda_k e$.

   Alors la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.}$

   (iii) La trace d'un endomorphisme étant celle de n'importe quelle matrice qui le représente, la matrice de la question précédente nous donne bien $\boxed{\operatorname{tr} u = 0 \text{ lorsque } \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u.}$

   (iv) **(c) ⇒ (b)** D'après les questions 1.c et 1.a, si $\operatorname{tr} u \neq 0$, $\operatorname{Im} u \not\subset \operatorname{Ker} u$ donc $\boxed{E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u.}$

   (b) ⇒ (a) si $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$, soit $\mathscr{B} = (e, e_2, \dots, e_n)$ une base adaptée à cette décomposition. Alors pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $u(e_k) = 0_E$ et on a $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e) = \lambda e$ car, comme en 1.b, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect} e$.

   La matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est donc $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ donc $\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$

   (a) ⇒ (c) Si u est diagonalisable, son polynôme caractéristique est scindé et sa trace est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité.
   Comme u est de rang 1, son noyau est de dimension $n-1$ (formule du rang) et donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$ (car u est diagonalisable).
   Il y a donc une autre valeur propre simple λ, nécessairement non nulle et égale à la trace de u. Donc $\boxed{\operatorname{tr} u \neq 0.}$

2. (i) On a $F_A : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ et si $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

   $$F_A(M + \lambda N) = \operatorname{tr}(A(M + \lambda N)) = \operatorname{tr}(AM) + \lambda \operatorname{tr}(AN) = F_A(M) + \lambda F_A(N)$$

   par linéarité de la trace, donc $\boxed{F_1 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^*.}$

   (ii) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout matrice $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

   $$F(A + \lambda B)(X) = F_{A+\lambda B}(X) = \operatorname{tr}((A + \lambda B)X) = t\,r(AX) + \lambda \operatorname{tr}(BX) = (F_A + \lambda F_B)(X)$$

par linéairité de la trace, donc $F(A+\lambda B)=F_A+\lambda F_B$ c'est-à-dire $\boxed{F \text{ est linéaire.}}$

(iii) $F_A(E_{i,j})=\mathrm{tr}(AE_{i,j})=\sum_{k=1}^{n}[AE_{i,j}]_{k,k}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}a_{k,\ell}[E_{i,j}]_{\ell,k}$ donc $\boxed{F_A(E_{i,j})=a_{j,i}}$ vu la définition des $E_{i,j}$.
Si $A\in\operatorname{Ker}F$, $F_A=0$ et en évaluant en particulier en les matrices élémentaires, pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]$, on obtient donc $A=0$. Ainsi, $\boxed{F \text{ est injective.}}$

(iv) F est une application linéaire et $\dim\mathscr{M}_n(\mathbb{C})^*=\dim\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\mathbb{C})=\dim\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\times\dim\mathbb{C}=\dim\mathscr{M}_n(\mathbb{C})(=n^2)$, donc l'injectivité de F démontrée à la question précédente permet de conclure que $\boxed{F \text{ est un isomorphisme.}}$

3. (i) Avec l'isomorphisme F (question 2.d), $\boxed{\text{il y a une unique matrice } A \text{ qui convienne,}}$ il s'agit de $\boxed{A=F^{-1}(f).}$

(ii) $X\in\operatorname{Ker}\psi_f\iff\psi_f(X)=0\iff f(X)J=0\iff f(X)=0$ car $J\neq 0$. Donc $\boxed{\operatorname{Ker}\psi_f=\operatorname{Ker}f.}$

On a ensuite $\operatorname{Im}\psi_f=\psi_f(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))=f(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))J$ donc $\operatorname{Im}\psi_f=(\operatorname{Im}f)J$. Mais $\operatorname{Im}f$ est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{C}$ car f est une forme linéaire non nulle, donc $\operatorname{Im}f=\mathbb{C}$ (vu la dimension). Donc $\boxed{\operatorname{Im}\psi_f=\operatorname{Vect}J.}$ Et comme $J\neq 0$, $\boxed{\operatorname{rg}\psi_f=1.}$

(iii) Calculons les cœfficients diagonaux de la matrice représentant ψ_f dans la base canonique.
Il s'agit des cœfficients selon $E_{i,j}$ de $\psi_f(E_{i,j})$ pour $i,j\in[\![1,n]\!]$.
Or $\psi_f(E_{i,j})=f(E_{i,j})J=\mathrm{tr}(AE_{i,j})J=a_{j,i}J$ avec la matrice A introduite en 3.a et vu 2.c.
Finalement, le cœfficient selon $E_{i,j}$ de $\psi_f(E_{i,j})$ est $a_{j,i}J_{i,j}$.
Donc, en passant par la matrice dans la base canonique,

$$\mathrm{tr}\,\psi_f=\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}a_{j,i}J_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{j,i}J_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}[AJ]_{j,j}=\mathrm{tr}(AJ)=f(J).$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{tr}(\psi_f)=f(J).}$

On peux aussi voir qu'on se ramène à la situation de la question 1avec $\psi_f^2 : X\mapsto f(f(X)J)J=f(X)f(J)J$ donc la discussion sur le fait que $\operatorname{Im}\psi_f\subset\operatorname{Ker}\psi_f$ ou non revient à distinguer les cas où $f(J)=0$ ou non. Dans les deux cas, on trouve $\mathrm{tr}\,\psi_f=f(J)$ car J convient comme vecteur e et $\psi_f(e)=\psi_f(J)=f(J)J=f(J)e$.

(iv) Vu 1.(iv), on déduit de la question précédente que

$$\boxed{\psi_f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \mathrm{tr}\,\psi_f=f(J)=\mathrm{tr}(AJ)\neq 0.}$$