Corrigé du Devoir en Temps Limité n° 3

Exercice 1 : Suites et suites de fonctions - E3A PSI 2010

Partie A

1. (a) $\boxed{a_n \geqslant 0 \text{ et } b_n \geqslant 0}$ s'obtient par récurrence simple sans encombre (à rédiger soigneusement sur la copie avec comme hypothèse de récurrence « a_n et b_n existent et sont positifs. »

   (b) $\boxed{a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}$ s'obtient directement en remplaçant a_{n+1} et b_{n+1} par les formules données dans l'énoncé.

2. La question précédente donne directement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} \leqslant a_{n+1}$.

   Soit $n \geqslant 1$. On a alors $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ et donc $a_{n+1} \leqslant \frac{2a_n}{2} = a_n$ et $b_{n+1} \geqslant \sqrt{b_n^2} = b_n$ car tout est positif.

   Finalement, $\boxed{0 \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n.}$

3. Soit $n \geqslant 1$. Vu la question précédente, $a_n b_n \geqslant b_n^2$ donc $b_n \leqslant \sqrt{a_n b_n}$ puis $a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n \leqslant a_n - b_n$ et enfin $\boxed{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \leqslant a_n - b_n.}$ Avec la question 1.b, on a alors pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} - b_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n - b_n)$.

   En itérant, on obtient pour tout $n \geqslant 1$, $a_n - b_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(a_1 - b_1)$.

   Si, de plus, $1 = b_0 \leqslant a = a_0$, tout ce qui précède reposant sur cette inégalité s'étend au rang $n = 0$ et on peut écrire

   $$a_1 - b_1 \leqslant \frac{1}{2}(a_0 - b_0) = \frac{1}{2}(a-1) = \frac{1}{2}|1-a|.$$

   Sinon, il suffit d'échanger les rôles de a_0 et b_0 ce qui ne change pas les autres termes des suites, pour obtenir

   $$a_1 - b_1 \leqslant \frac{1}{2}(1-a) = \frac{1}{2}|1-a|$$

   Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0,\ a_n - b_n \leqslant \frac{1}{2^n}|1-a|.}$

4. D'après 2, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont respectivement décroissante et croissante. Par la question précédente, $a_n - b_n \to 0$ (on a bien $0 \leqslant a_n - b_n$. Donc $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

   Donc $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont convergentes vers une même limite.}}$

Partie B

1. La partie nous dit directement que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(\varphi_n(x))_n$ et $(\psi_n(x))_n$ convergent vers une même limite que l'on peut noter $f(x)$.

   Par définition, $\boxed{\text{les suites } (\varphi_n) \text{ et } (\psi_n) \text{ convergent simplement sur } [0,+\infty[\text{ vers une fonction } f.}$

2. (a) Avec $x = 0$, $\varphi_0(0) = 0$ et on obtient par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\psi_n(0) = 0$.

   Or $\psi_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$ donc par unicité de la limite, $\boxed{f(0) = 0.}$

Avec $x=1$, $\varphi_0(1)=\psi_1(1)=1$ et par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi_n(1)=\psi_n(1)=1$.

Or $\varphi_n(1)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$ donc par unicité de la limite, $\boxed{f(1)=1.}$

(b) Soit $x\in\mathbb{R}^+$. Avec l'étude de la partie A, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{x}=\psi_1(x)\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\varphi_1(x)=\dfrac{1+x}{2}$. Donc en faisant $n\to+\infty$, $\boxed{\sqrt{x}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1+x}{2}.}$

3. Soit A un réel strictement positif. Avec l'étude de la partie A, pour tout $x\in[0,A]$, la monotonie et la limite commune des suites nous dit que pour $n\geqslant 1$, $\psi_n(x)\leqslant f(x)\leqslant\varphi_n(x)$ donc

$$\left|\varphi_n(x)-f(x)\right|\leqslant\psi_n(x)-\varphi_n(x)\leqslant\frac{1}{2^n}\,|1-x|=\frac{1}{2^n}\max(1-x,x-1)\leqslant\frac{1}{2^n}\max(1,A-1)$$

d'après A.3, majoration uniforme en x. Donc φ_n-f est bornée et $\left\|\varphi_n-f\right\|_{\infty,[0,A]}\leqslant\dfrac{1}{2^n}\max(1,A-1)\to 0$ et $\boxed{(\varphi_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,A].}$

On montrer exactement de la même manière que $\boxed{(\psi_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,A].}$

Remarque : Le $n\geqslant 1$ ne change rien sur le mode de convergence.

4.
- ⋆ On montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que les fonctions φ_n et ψ_n sont continues sur $[0,+\infty[$, par opérations usuelles sur les fonctions continues (à rédiger quand même, surtout pour E3A !).
- ⋆ La suite de fonctions (φ_n) (par exemple) converge uniformément vers f sur tout segment de la forme $[0,A]$ de $\mathbb{R}^+$ donc au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^+$.

Par théorème de transfert de continuité, $\boxed{f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}^+.}$