Devoir en Temps Limité n° 3

À lire attentivement

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des question (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est IMPÉRATIF d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- **Tout départ avant la fin des 4 heures n'est pas autorisé.**
- **LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.**

Exercice 1 : Suites numériques et suites de fonctions

Partie A

Soit a un réel positif ou nul. On considère les **suites réelles** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_0 = a,\ b_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a
   (a) $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$,
   (b) $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \leqslant a_n - b_n$ puis que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|a_n - b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}|1-a|$.
4. En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et convergent vers la même limite.

Partie B

Désormais $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent les **suites de fonctions** définies sur $[0,+\infty[$ en posant

$$\varphi_0(x) = x,\ \psi_0(x) = 1,\ \varphi_{n+1}(x) = \frac{\varphi_n(x) + \psi_n(x)}{2} \ \text{ et } \ \psi_{n+1}(x) = \sqrt{\varphi_n(x)\psi_n(x)}$$

1. Déduire de la partie A que les suites (φ_n) et (ψ_n) convergent simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f.
2. (a) Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.
   (b) Montrer qu'on a $\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1+x}{2}$ pour tout x positif.
3. Soit A un réel strictement positif. Montrer que les suites de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $[0,A]$ vers f. (*On pourra utiliser la question* A (3)).
4. En déduire que la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice 2 : Algèbre linéaire

1. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ de dimension finie $n > 0$. Soit u un endomorphisme de E de rang 1.
   (i) En discutant sur la dimension de $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$, montrer que $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$ ou $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$.
   (ii) Soit e un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$. Justifier l'existence d'une base de E dont le premier vecteur est e.
   Dans le cas où $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, quelle est la forme de la matrice de u sur une telle base ?
   (iii) Dans le cas où $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, montrer que $\operatorname{tr} u = 0$.
   (iv) Montrer alors l'équivalence des trois assertions :
   (a) u est diagonalisable.
   (b) $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$.
   (c) $\operatorname{tr} u \neq 0$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices (n,n) à cœfficients dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note F_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ F_A(X) = \operatorname{tr}(AX)$, où $\operatorname{tr}(AX)$ désigne la trace de la matrice AX.
   (i) Montrer que F_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (ii) On considère l'application F définie par $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^* \\ A & \longmapsto & F_A \end{array}\right.$
   Montrer que F est linéaire.
   (iii) Soit $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, exprimer $F_A(E_{i,j})$ en fonction des cœfficients de A. En déduire que F est injective.
   (iv) Montrer que F est un isomorphisme.
3. Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'application ψ_f définie par $\psi_f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & f(X)J \end{array}\right.$
   On remarquera que ψ_f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (i) Justifier l'existence d'une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \ f(X) = \operatorname{tr}(AX)$.
   (ii) Comparer le noyau de ψ_f et le noyau de f. Quelle est l'image de ψ_f ? Quel est le rang de ψ_f ?
   (iii) Exprimer la trace de ψ_f en fonction de A et J.
   (iv) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A et J pour que ψ_f soit diagonalisable.

Problème : Séries de fonctions

Le problème porte sur l'étude des séries factorielles, séries de fonctions de la forme

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

La partie I traite d'un exemple. La partie II, indépendante de la première, a pour objet l'étude des propriétés de la somme d'une série factorielle convergente sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Partie I – Préliminaires

I.A - Pour tout entier p naturel non nul, on pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u(n,p)=\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}.$$

I.A.1) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u(n,p)$ est convergente.

I.A.2) On pose $\sigma(p)=\sum_{n=1}^{+\infty} u(n,p)$. Calculer $\sigma(1)$.

I.A.3) Pour $p\geqslant 2$ et pour n quelconque dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $u(n,p-1)-u(n+1,p-1)$ en fonction de p et de $u(n,p)$.

I.A.4) En déduire la valeur de $\sigma(p)$ en fonction de p, pour $p\geqslant 2$.

I.B - Soient q un entier $\geqslant 2$ et N un entier naturel $\geqslant 1$.

Donner une majoration du reste $R(N,q)=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^q}$ en le comparant à une intégrale.

Partie II – Séries factorielles

II.A -

II.A.1) Pour tout entier naturel n et pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$u_n(x)=\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)},\quad v_n(x)=\frac{1}{(n+1)^x},\quad w_n(x)=\frac{u_n(x)}{v_n(x)}.$$

Montrer que la série de terme général $\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$, définie pour $n\geqslant 1$, est convergente.

II.A.2) En déduire qu'il existe $\ell(x)$ (dépendant de x et strictement positif) tel que $\frac{u_n(x)}{v_n(x)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell(x)$.

II.B - Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de complexes et x un réel strictement positif.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n u_n(x)$ est absolument convergente (en abrégé AC) si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n v_n(x)$ est AC.

II.C - On désigne désormais par $\mathscr{A}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ indexées par $\mathbb{N}$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n u_n(x)$ soit AC pour tout réel x strictement positif.

Soit $a=(a_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de $\mathscr{A}$. Montrer que :

II.C.1) la série de fonction $\sum a_n u_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[\alpha,+\infty[$ où $\alpha>0$;

II.C.2) la fonction f_a définie par : $x\longmapsto f_a(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$ est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$;

II.C.3) la fonction f_a tend vers 0 en $+\infty$.

II.D -

II.D.1) Donner un exemple d'un élément a de $\mathscr{A}$ avec a_n non nul pour tout entier naturel n.

II.D.2) Donner un exemple d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ qui ne soit pas un élément de $\mathscr{A}$.

II.E - Soit a un élément de $\mathscr{A}$.

II.E.1) Montrer que, pour tout entier n la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x>0, |u_n'(x)|\leqslant u_n(x)\left(\frac{1}{x}+\ln\left(1+\frac{n}{x}\right)\right).$$

II.E.2) On a admet le théorème suivant :

Classe $\mathscr{C}^1$ d'une série de fonctions

Soit $(g_n)_n$ une suite de fonction de $I\to\mathbb{C}$ où I est un intervalle réel. On suppose que

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- La série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur I.
- La série de fonctions $\sum g_n'$ converge uniformément sur tout segment $[\alpha,\beta]\subset I$.

Alors

- $g=\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- $g'=\sum_{n=0}^{+\infty} g_n'$.

Déduire de la question précédente et du théorème admis que la fonction f_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

FIN DE L'ÉNONCÉ