Devoir Libre n° 5

Déterminants et formule de condensation

Mines-Ponts – PSI

Le but de ce problème est de montrer la formule dite de condensation sur les déterminants et d'en explorer les applications et généralisations.

Notations

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (matrice carrée de taille $n\times n$, on dit aussi d'ordre n, à coefficients réels.)

- On note $M_{i,j}$ le coefficient de M qui se trouve sur la i-ème ligne et la j-ème colonne.
- On note $M^\intercal$ sa transposée définie par $(M^\intercal)_{i,j}=M_{j,i}$ pour tout $i,j\in\{1,\dots,n\}$.
- On note $\det(M)$ son déterminant.
- Pour $n\geqslant 2$ et $i,j\in\{1,\dots,n\}$, on note $[M]_i^j$ la matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de M en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne.
- Plus généralement, soit $r\geqslant 0$. Pour $n\geqslant r+1$ et $i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_r\in\{1,\dots,n\}$, vérifiant $i_k\neq i_l$ et $j_k\neq j_l$ si $k\neq l$, on note $[M]_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_r}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de M en enlevant les lignes d'indices $i_1,\dots,i_r$ et les colonnes $j_1,\dots,j_r$. On conviendra que cette matrice vaut M si $r=0$.
- On note $\operatorname{Com}M$ la comatrice de M définie par $(\operatorname{Com}M)_{i,j}=(-1)^{i+j}\det[M]_i^j$.
- On désignera par I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et par $e=(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

I. Préliminaires

Dans le cas où $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas inversible, on rappelle qu'il existe deux matrices inversibles P et Q (de tailles $n\times n$) telles que $M=PJQ$ où

$$J=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & 0\end{pmatrix}$$

J étant une matrice *diagonale* dont les r premiers éléments *diagonaux* valent 1 et dont les $n-r$ derniers éléments diagonaux valent 0. Si $J=0$, on convient que $r=0$.

1. Rappeler l'interprétation de r.

2. Montrer qu'il existe une suite de matrices inversibles $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $J_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}J$ dans le sens où pour tout $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $(J_k)_{i,j}\xrightarrow[k\to+\infty]{}=J_{i,j}$. En déduire que $PJ_kQ\xrightarrow[k\to+\infty]{}M$.

3. Montrer que le déterminant définit une fonction continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que si $A_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}A$ alors $\det A_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}\det A$. (on pourra écrire le déterminant comme une somme de fonctions toutes en forme de produits).

II. Formule de condensation

On se propose de montrer dans cette partie la formule de Desnanot-Jacobi, dite de *condensation*, suivante où n est un entier $\geqslant 3$:

$$\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(M)\det[M]_{1,n}^{1,n}=\det[M]_1^1\det[M]_n^n-\det[M]_n^1\det[M]_1^n \tag{1}$$

4. Soit $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Calculer

$$M_{i,1}\det[M]_i^1-M_{i,2}\det[M]_i^2+\cdots+(-1)^{n-1}M_{i,n}\det[M]_i^n$$

en fonction de $\det(M)$ et de i.

5. Montrer que

$$M_{j,1}\det[M]_i^1-M_{j,2}\det[M]_i^2+\cdots+(-1)^{n-1}M_{j,n}\det[M]_i^n=0$$

pour $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, vérifiant $i\neq j$. (On interprètera le membre de gauche comme le développement par rapport à une ligne du déterminant d'une certaine matrice).

6. *Déduire des deux questions précédentes* le fait que $M(\operatorname{Com}M)^\intercal=xI_n$ où x est un nombre réel que l'on précisera.

On introduit la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$M^*=\begin{pmatrix} \det[M]_1^1 & 0 & 0 & & 0 & (-1)^{n+1}\det[M]_n^1\\ -\det[M]_1^2 & 1 & 0 & & 0 & (-1)^{n+2}\det[M]_n^2\\ \det[M]_1^3 & 0 & 1 & & 0 & (-1)^{n+3}\det[M]_n^3\\ \vdots & & & & & \vdots \\ (-1)^n\det[M]_1^{n-1} & 0 & 0 & & 1 & -\det[M]_n^{n-1}\\ (-1)^{n+1}\det[M]_1^n & 0 & 0 & & 0 & \det[M]_n^n\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, M^* est obtenue à partir de $(\operatorname{Com}M)^\intercal$ en remplaçant, pour chaque $i\in\{1,\dots,n\}$ et chaque $j\in\{2,\dots,n-1\}$ le coefficient $(\operatorname{Com}M)^\intercal_{i,j}$ par 0 si $i\neq j$ et par 1 si $i=j$.

7. Calculer $\det M^*$ en fonction de $\det[M]_1^1$, $\det[M]_n^n$, $\det[M]_n^1$ et $\det[M]_1^n$.

8. Ecrire le calcul explicite de la matrice produit MM^* sous la forme du tableau usuel de taille $n\times n$.

9. En utilisant la question précédente, démontrer (1) dans le cas où M est inversible.

10. Démontrer (1) dans le cas où M n'est pas inversible.

III. Algorithme de Lewis Carroll

Le Révérend Charles L. Dodgson, plus connu sous son nom de plume, Lewis Carroll, s'est servi de la formule de condensation (1) pour mettre au point un algorithme de calcul de déterminant $n\times n$, n'utilisant que des déterminants 2×2.

L'algorithme fonctionne comme suit.

On doit trouver le déterminant d'une matrice M de taille $n\times n$.

Pour cela, on met en jeu une suite de couples de matrices

$$\left(A^{(k)},B^{(k)}\right)\in\mathscr{M}_{n-k}(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_{n-k-1}(\mathbb{R})$$

pour $k=0,\dots,n-2$ définies comme suit.

Pour $k=0$, $A^{(0)}=A$ et $B^{(0)}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Voici comment l'on passe du couple $\left(A^{(k)},B^{(k)}\right)$ $(k\leqslant n-3)$ au couple $\left(A^{(k+1)},B^{(k+1)}\right)$. Si aucun des coefficients de $B^{(k)}$ n'est nul (ce qui est le cas pour $B^{(0)}$) alors on pose

$$A_{i,j}^{(k+1)}=\frac{1}{B_{i,j}^{(k)}}\begin{vmatrix} A_{i,j}^{(k)} & A_{i,j+1}^{(k)} \\ A_{i+1,j}^{(k)} & A_{i+1,j+1}^{(k)}\end{vmatrix},\ i,j\in\{1,\dots,n-k-1\}$$

$$B_{i,j}^{(k+1)}=A_{i+1,j+1}^{(k)},\ i,j\in\{1,\dots,n-k-2\}$$

Bien entendu, dans le membre de droite qui définit le terme $A_{i,j}^{(k+1)}$, $|.|$ désigne un déterminant 2×2. Enfin, si $\left(A^{(n-2)},B^{(n-2)}\right)$ a pu être défini par la précédente procédure, alors on définit la matrice de taille 1×1, $A^{(n-1)}=\left(A_{1,1}^{(n-1)}\right)$ par

$$A_{1,1}^{(n-1)}=\frac{1}{B_{1,1}^{(n-2)}}\begin{vmatrix} A_{1,1}^{(n-2)} & A_{1,1+1}^{(n-2)} \\ A_{1+1,1}^{(n-2)} & A_{1+1,1+1}^{(n-2)}\end{vmatrix}$$

Noter qu'il *n'y a pas* de terme $B^{(n-1)}$. L'algorithme se termine en affirmant que $A_{1,1}^{(n-1)}=\det M$, on prouvera plus loin sa validité. Si l'un des coefficients de $B^{(k)}$ est nul, l'algorithme ne s'applique pas, et Lewis Carroll préconise de recommencer après avoir échangé (convenablement) des lignes dans la matrice initiale.

Exemple :

$$M=A^{(0)}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2\end{pmatrix}\quad B^{(0)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 11\end{pmatrix}\quad B^{(1)}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{(2)}=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 38\end{pmatrix}\quad B^{(2)}=\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)}=\begin{pmatrix} 77 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de M vaut donc 77.

11. Appliquer cet algorithme au calcul du déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

12. Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que l'algorithme se termine sans qu'aucun des coefficients des matrices $B^{(i)}$ ne s'annule. Quel est le nombre u_n de déterminants 2×2 que l'on a calculé au cours de la procédure ?

Une autre méthode de calcul de déterminant consiste à répéter le développement suivant des lignes par cofacteurs jusqu'à ce qu'on obtienne des déterminants 2×2. L'objet de la question suivante est d'étudier le nombre v_n de déterminants 2×2 ainsi obtenus.

13. Soit donc v_n le nombre de déterminants 2×2 calculés lorsque l'on applique la méthode de développements successifs par rapport à des lignes pour calculer le déterminant d'une matrice de taille $n\times n$. Etablir une relation entre v_n et v_{n-1}. Puis, comparer u_n et v_n lorsque $n\to+\infty$.

On se place désormais dans le cas où l'algorithme de Lewis Carroll s'applique. On se propose de montrer sa validité.

14. Soit $r,s\in\{1,2,\dots,n-2\}$. En appliquant la formule de condensation, montrer que $A_{r,s}^{(2)}$ est le déterminant d'une matrice 3×3, extraite de M, que l'on précisera.

15. Soit $k\in\{1,2,\dots,n-1\}$ et $r,s\in\{1,2,\dots,n-k\}$. Généraliser le résultat précédent en exprimant $A_{r,s}^{(k)}$ comme le déterminant d'une matrice de taille $(k+1)\times(k+1)$ extraite de M que l'on précisera. Prouver que

$$A_{1,1}^{(n-1)}=\det(M)$$

ce qui établit la validité de l'algorithme

IV. Le λ-déterminant

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On introduit la notion de λ-déterminant d'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ convenable, noté $\det_\lambda(M)$, de la manière suivante.

Soit $(a)\in\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$, $\det_\lambda(a)=a$.

Soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\det_\lambda\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)=ad+\lambda bc$.

On impose de plus, pour toute matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la formule de condensation suivante :

$$\det{}_\lambda(M)\det{}_\lambda[M]_{1,n}^{1,n}=\det{}_\lambda[M]_1^1\det{}_\lambda[M]_n^n+\lambda\det{}_\lambda[M]_n^1\det{}_\lambda[M]_1^n \tag{2}$$

Cette condition (2) permet donc de définir par récurrence la λ-déterminant pour une matrice M de taille $n\times n$, à la condition de ne pas avoir à diviser par 0 au cours de son calcul. Plus précisément, supposons que cette procédure par récurrence ait permis de définir le membre de droite de (2) ainsi que $\det_\lambda[M]_{1,n}^{1,n}$ et qu'en plus ce dernier soit non nul. Alors on définit $\det_\lambda(M)$ par (2) puisqu'on peut diviser par $\det_\lambda[M]_{1,n}^{1,n}\neq 0$.

Dans la suite, M désigne une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle $\det_\lambda(M)$ est bien défini.

16. Soit $t\in\mathbb{R}^*$ et $j\in\{1,\dots,n\}$. On note $M_{t,j}$ la matrice obtenue à partir de M par multiplication de la j-ème colonne de M par t. Montrer que $\det_\lambda(M_{t,j})$ est bien défini et donner sa valeur en fonction de $\det_\lambda(M)$ et de t.

On considère un vecteur $(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que les réels x_i sont tous non nuls. On introduit la matrice de Vandermonde de taille $n\times n$:

$$V(x_1,\dots,x_n)=\left(x_i^{j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

où x_i^{j-1} est le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne.

17. On suppose que $x_j+\lambda x_i$ est non nul pour tous $i,j\in\{1,\dots,n\}$ tels que $1\leqslant i<j\leqslant n$. Calculer $\det_\lambda V(x_1,\dots,x_n)$ en fonction de $x_j+\lambda x_i$ $(i,j\in\{1,\dots,n\})$. (On commencera par le cas $n=3$, puis on procédera par récurrence sur n).

FIN DE L'ÉNONCÉ