Un Corrigé du Devoir Libre n° 4

Mines de sup 2010, Second problème

PARTIE A

1. Comme A est symétrique et C antisymétrique, $\boxed{\text{elles vérifient la relation (1).}}$

2. On calcule $\boxed{A^2 = I.}$ On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{2k} = (A^2)^k = I$ et $A^{2k+1} = (A^2)^k A = A$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n \text{ vérifie (1).}}$

3. Comme $A^2 = I$, $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = 1.}$

4. Par définition de la matrice d'un enjdomorphisme, on a directement que $\boxed{u(\vec{i}) = \vec{j} \text{ et } u(\vec{j}) = \vec{i}.}$
Comme $A^2 = I$, $u \circ u = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Donc $\boxed{\text{l'endomorphisme } u \text{ est une symétrie.}}$
De plus $u(x, y) = (x, y)$ si et seulement si $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ie $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ie $x = y$. Donc $\boxed{\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Vect}(1, 1).}$

5. $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique donc $\boxed{\text{vérifie (1).}}$ On par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ U^n = 2^{n-1}U.}$ et est donc symétrique. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{U^n \text{ vérifie (1).}}$

6. $A + C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{(A+C)(A+C)^\intercal = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } (A+C)^\intercal(A+C) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$
En particulier, $A + C \notin E_2$ alors que $A, C \in E_2$. Donc $\boxed{E_2 \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$

7. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_2$ si et seulement si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ba + dc & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ca + db & c^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

On est donc ramené à résoudre le système $\begin{cases} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \\ ab + cd = ac + bd \\ b^2 + d^2 = c^2 + d^2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} c^2 = b^2 \\ (a-d)(b-c) = 0 \end{cases}$

Les différentes possibilités sont donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.}$

8. On a directement $\boxed{E = \mathrm{Vect}\big(E_{1,1}, A, E_{2,2}\big) \cup \mathrm{Vect}(I, C).}$
Les familles $(E_{1,1}, A, E_{2,2})$ et (I, C) sont libres : ce sont des bases de ces espaces vectoriels respectifs.

9. $\boxed{E_2 \text{ n'est pas stable par produit.}}$ Par exemple, $C, U \in E_2$. Mais $CU = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est d'aucune des formes trouvées en 7.

PARTIE B

1. Par définition, on a $\boxed{S=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.}$

2. On calcule S^2 directement ou en utilisant que $h^2(\vec{i})=h(-\vec{k})=-\vec{j}$, $h^2(\vec{j})=h(\vec{i})=-\vec{k}$ et $h^2(\vec{k})=h(\vec{j})=\vec{i}$. Donc $\boxed{S^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.}$ Puis on calcule $SS^\intercal=S^\intercal S=I_3$ et $S^2(S^2)^\intercal=(S^2)^\intercal S^2=I_3$. Donc $\boxed{S,S^2\in E_3.}$

3. Comme $R^\intercal=aI_3+bS^\intercal+c(S^\intercal)^2$ et comme I_3, S et $S^\intercal$ commutent, R et $R^\intercal$ commutent, donc $\boxed{R\in E_3.}$

4. D'après la question précédente, $\boxed{E_3 \text{ contient l'espace vectoriel } F=\mathrm{Vect}(I_3,S,S^2).}$
$\boxed{\text{Il est de dimension 3}}$ car si $\lambda I_3+\mu S+\nu S^2=0$, alors $\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu\\ \star & \star & \star\\ \star & \star & \star\end{pmatrix}=0$ donc $\lambda=\mu=\nu=0$: (I_3,S,S^2) en est une base.

5. Un produit de matrices de F est une combinaison linéaire de I_3, S, S^2, S^3 et S^4. Il suffit donc de démontrer que $S^3,S^4\in F$.
Or $h^3(\vec{i})=-\vec{i}$, $h^3(\vec{j})=-j$ et $h^3(\vec{k})=-\vec{k}$ donc $S^3=-I_3\in F$ et $S^4=-S\in F$.
Ainsi, $\boxed{F \text{ est stable par multiplication matricielle.}}$

PARTIE C

1. On calcule $BB^\intercal=\begin{pmatrix} & & a+1\\ & & \\ (\star) & & \end{pmatrix}$ et $B^\intercal B=\begin{pmatrix} & & 0\\ & & \\ (\star) & & \end{pmatrix}$. Si $B\in E_4$, $a=-1$, et le réciproque est vraie car alors B est symétrique. Donc $\boxed{B\in E_4 \text{ si et seulement si } a=-1.}$

2. Avec des notations évidentes, on a, dans B, $C_2=-C_3$ donc $\mathrm{Im}\,A=\mathrm{Vect}(C_1,C_2,C_4)$.
Or $\lambda C_1+\mu C_2+\nu C_4=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ donc (C_1,C_2,C_4) est une base de $\mathrm{Im}\,A$ donc
$\boxed{((1,-1,1,1),(1,0,0,-1),(1,1,-1,1))=(\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3+\vec{e}_4,\vec{e}_1-\vec{e}_4,\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3+\vec{e}_4) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\,u.}$

On a alors par théorème du rang que $\dim\mathrm{Ker}\,u=1$ et $C_2+C_3=0$ donne $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ Donc $(0,1,1,0)$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\,u$. Donc $\boxed{((0,1,1,0))=(\vec{e}_2+\vec{e}_3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\,u.}$

3. $u(\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3-\vec{e}_4)$ est représenté dans la base B" par $B\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\\2\end{pmatrix}$
Donc $\boxed{u(\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3-\vec{e}_4)=-2(\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3-\vec{e}_4).}$ Ainsi -2 est valeur propre de u et $\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3-\vec{e}_4=(1,1,-1,-1)$ en est un vecteur propre associé.

4. On calcule $\boxed{B\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\-2\end{pmatrix}.}$ Les images sont le double du vecteur de départ : 2 est valeur propre de B et on a là deux vecteurs propres associés à cette valeur propre.

5. On a directement que $\boxed{\mathscr{M}_C(u)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}}$ car $\vec{e}_2+\vec{e}_3\in\mathrm{Ker}\,u$ et par les questions 17 et 18. On a donc, d'après la formule de changement de base, si $\boxed{P=P_{B'',C}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&1&0&-1\\1&-1&0&1\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}}$ et $\boxed{\Delta=\mathscr{M}_C(u)=\mathrm{diag}(0,-2,2,2),}$ que $B=P\Delta P^{-1}$.

6. Soit $n\in\mathbb{N}$. Comme B^n et Δ^n représentent u^n dans les bases B" et C respectivement, la formule de changement de base donne $\boxed{B^n=P\Delta^nP^{-1}.}$ Si $\boxed{p=0,\ B^0=I_4.}$

Puis, si $p\in\mathbb{N}^*$, $B^{2p}=P\Delta^{2p}P^{-1}=P\,\mathrm{diag}(0,4^p,4^p,4^p)P^{-1}=4^{p-1}P\,\mathrm{diag}(0,4,4,4)P^{-1}=4^{p-1}P\Delta^2P^{-1}$. Donc $\boxed{B^{2p}=4^{p-1}B^2.}$
Enfin, si $p\in\mathbb{N}$, $B^{2p+1}=P\Delta^{2p+1}P^{-1}=P\,\mathrm{diag}(0,4^p\times2,4^p\times2,4^p\times2)P^{-1}=4^pP\,\mathrm{diag}(0,2,2,2)P^{-1}=4^pP\Delta P^{-1}$. Donc $\boxed{B^{2p+1}=4^pB.}$

$\mathscr{F}in$