Programme de colle – MPI

Réduction (point de vue géométrique)

Extrait du programme officiel :

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en première année. Elle trouve des applications et des illustrations dans d'autres domaines du programme (topologie, équations différentielles, systèmes dynamiques discrets, chaînes de Markov). Elle permet également de tisser des liens entre l'algèbre linéaire et l'algèbre générale, notamment polynomiale.

Le but de cette section est de donner une introduction substantielle au problème de la réduction. Les approches sont de deux types, qu'il convient d'identifier : la première, de nature géométrique, repose sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; la seconde, plus algébrique, fait appel aux polynômes annulateurs [sera vue plus tard.].

Sans soulever de difficulté, on signale que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas d'un corps de base quelconque. Pour éviter les difficultés liées aux polynômes en caractéristique non nulle, la section est traité sous l'hypothèse que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	En dimension finie, traduction matricielle.
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.	Équation aux éléments propres $u(x)=\lambda x$.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.	La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n.	
Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.	Le noyau et l'image de u sont stables par v.
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX=\lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.
Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients du polynôme caractéristique de degrés 0 et $n-1$.
Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.	
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. Multiplicité d'une valeur propre.	
La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.	
Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres. Cas des projecteurs, des symétries.
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E.	Caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Interprétation en termes d'endomorphisme. Dans les exercices pratiques, on se limite à $n=2$ ou $n=3$.
Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.	Traduction matricielle.
Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle. Cas où χ_u est scindé à racines simples.
Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.	Interprétation en termes d'endomorphisme. La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.
Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	
Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.	
Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.	Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique.
L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	

Le théorème de Cayley-Hamilton est énoncé, non démontré, mais aucune notion de réduction concernant les polynômes annulateur n'est au programme cette semaine.

Dérivation et convexité des fonctions numériques

Révisions du programme de 1re année. Voir page suivante.

Semaine prochaine : Régularité des suites et séries de fonctions. Intégration sur un segment (révisions).

Questions de cours

(i) Les sous-espaces propres sont en somme directe.

(ii) Si deux endomorphismes commutent, l'image, le noyau et plus généralement les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

(iii) Définitions, caractérisations (5 pour les endomorphismes + 1 pour les matrices) et conditions suffisantes (2) de la diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice. Démonstrations choisies par le colleur.

(iv) $\chi_A = X^n - (\operatorname{tr} A)X + \cdots + (-1)^n \det A$. Si χ_A est scindé, expression de $\operatorname{tr} A$ et $\det A$ à l'aide des valeurs propres de A.

(v) CNS sur la représentation par bloc d'un endomorphisme dans une base adaptée pour qu'un sous-espace soit stable.
Polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit sur un sous-espace stable.
Pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est entre 1 et la multiplicité de la valeur propre.

(vi) Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

(vii) Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.

(viii) Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis.

(ix) Inégalité de Jensen.

(x) **CCINP 3** :

1. On pose $g(x)=\mathrm{e}^{2x}$ et $h(x)=\dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

(xi) **CCINP 4** :

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et soit $x_0\in]a,b[$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=0$.

(xii) **CCINP 59** : Soit n un entier naturel tel que $n\geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall P\in E,\ f(P)=P-P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   a) sans utiliser de matrice de f,
   b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q\in E$. Trouver P tel que $f(P)=Q$.
Indication : si $P\in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. f est-il diagonalisable ?

(xiii) **CCINP 67** : Soit la matrice $M=\begin{pmatrix}0&a&c\\b&0&c\\b&-a&0\end{pmatrix}$ où a,b,c sont des réels.
M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

(xiv) **CCINP 69** : On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&a&1\\a&0&1\\a&1&0\end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

(xv) **CCINP 70** : Soit $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ et $B=a\mathrm{I}_3+bA+cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

(xvi) **CCINP 72** : Soit n un entier naturel non nul.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.
On suppose que $f(e_1)=f(e_2)=\dots=f(e_n)=v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

(xvii) **CCINP 73** : On pose $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&-1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I_2,A)$.

(xviii) **CCINP 83** : Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u\circ v$, alors λ est valeur propre de $v\circ u$.
2. On considère, sur $E=\mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u:P\longmapsto\displaystyle\int_1^X P$ et $v:P\longmapsto P'$.
Déterminer $\mathrm{Ker}(u\circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v\circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda=0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda=0$.
Indication : penser à utiliser le déterminant.

Programme de MP2I

A. Dérivation

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+h\varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0$. Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	Interprétations géométrique et cinématique. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}}f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a)=\ell$. Extension au cas où $\ell=\pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Pour $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

B. Convexité

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x,y)\in I^2$ et $\lambda\in[0,1]$, $f((1-\lambda)x+\lambda y)\leqslant(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.	Interprétation géométrique.
Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I, on a l'inégalité $$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$ quels que soient les réels positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1,\dots,x_n$ de I.	Tout développement général sur les barycentres est hors programme.
Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.	
Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.	
b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables.	
Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.	
Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	