

# Intégration sur un segment des fonctions numériques (MP2I)

Dans tout le chapitre,  $I$  désigne un intervalle réel contenant au moins deux points,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## INTÉGRATION SUR UN SEGMENT D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX

L'idée de la construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceau consiste à commencer par définir celle de fonctions en escalier (somme des aires des rectangles) puis grâce au fait que toute fonction continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, d'en déduire que si  $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ ,  $\{\int_{[a,b]} \varphi ; \varphi \in \mathcal{E}([a, b]), \varphi \leq f\}$  et  $\{\int_{[a,b]} \psi ; \psi \in \mathcal{E}([a, b]), \psi \geq f\}$  admettent respectivement une borne supérieure et inférieure, égales. On a alors la définition :

### Définition 1 : Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit  $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ . On définit

$$\int_{[a,b]} f = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}([a,b]) \\ \varphi \leq f}} \int_{[a,b]} \varphi = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{E}([a,b]) \\ \psi \geq f}} \int_{[a,b]} \psi.$$

Soit  $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$ . Alors  $\Re f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ ,  $\Im f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$  et on pose

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \Re f + i \int_{[a,b]} \Im f$$

La première définition a un intérêt uniquement théorique.

### Notation 1

Pour  $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$ , on note  $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$ ,  
 $\int_b^a f = -\int_a^b f = -\int_{[a,b]} f$  et  $\int_a^a f = 0$ .  
 On note aussi  $\int_a^b f = \int_a^b f(t) dt$ .

### Propriété 1 : de l'intégrale sur un segment d'une fonction CPM

Si  $I$  intervalle,  $a, b \in I$  (non nécessairement ordonnés).

$$(i) \begin{cases} \mathcal{C}_m(I) & \rightarrow \mathbb{K} \\ f & \rightarrow \int_a^b f \end{cases} \text{ est linéaire.}$$

$$(ii) \text{ Si } a \leq b, f \leq g \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

$$\text{ Si } b \leq a, f \leq g \implies \int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

(iii)  $\triangle!$  En général, si  $a, b \in I$  et  $f \in \mathcal{C}_m(I)$ ,

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

$$(iv) \text{ Si } a, b, c \in I \text{ et } f \in \mathcal{C}_m(I), \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

### Propriété 2 : Positivité améliorée

Si  $f$  est **continue** sur  $[a, b]$  ; et **de signe constant**,

$$\int_a^b f = 0 \iff f \equiv 0 \text{ sur } [a, b]$$

C'est faux si  $f$  est seulement continue par morceaux.



Voir exercice du TD : 3 à 9

### Propriété 3 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si  $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ,

Exercice 1 : CCINP 76

Exercice 2 : CCINP 79



## SOMMES DE RIEMANN

### Définition 2 : Sommes de Riemann

Soit  $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$ ,  $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$  subdivision de  $[a, b]$  et pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$ . On appelle **somme de Riemann associée à  $f, \sigma$  et  $(\xi_k)_k$**  :

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(\xi_k)$$

### Théorème 1 : Convergence des sommes de Riemann

Soit  $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$ .

(i)  $h(\sigma)$  désignant le pas de  $\sigma$ ,

$$S(f, \sigma, \xi) \xrightarrow{h(\sigma) \rightarrow 0} \int_a^b f.$$

(ii) Si, de plus,  $f$  est  $K$ -lipschitzienne,

$$\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| \leq K(b-a)h(\sigma).$$

### Corollaire 1 : Cas simples

Si  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$ ,  $a < b$ ,

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f.$$

En particulier, si  $a = 0$  et  $b = 1$ ,  $f \in \mathcal{C}_m([0, 1])$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f.$$

### Remarque

**R1** – À cause du  $\frac{1}{n}$ , ajouter ou enlever un nombre fini de termes dans la somme ne change pas sa limite.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \text{ou } \sum_{k=1}^{n-2} \text{ou } \sum_{k=1}^{n+12} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f.$$

### Exercice 3

Limite de  $\sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$ . Retrouver la nature de la série harmonique.

### Exercice 4

Calculer  $I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos t + 1) dt$  pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .



Voir exercice du TD : 13 à 16



## INTÉGRALE ET PRIMITIVE

$I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points.

### Propriété 4

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $F, G$  deux primitives de  $f$  sur  $I$ , avec  $I$  **intervalle**.

Alors on a  $C \in \mathbb{K}$  tel que  $\forall x \in I, F(x) = G(x) + C$ .

### Théorème 2 : fondamental de l'Analyse

Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ ,  $F : x \mapsto \int_a^x f$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

### Corollaire 2 : du théorème fondamental

(i) Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

(ii) Si  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ ,  $F$  primitive de  $f$  sur  $I$ ,  $a, b \in I$ ,

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(iii) Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1([a, b])$ ,  $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ .

(iv) **Inégalité des accroissements finis** : Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  et  $f'$  bornée par  $k$ , alors  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $[a, b]$ .

### Propriété 5 : Fonction intégrale dépendant de ses bornes

Soient  $I, J$  intervalles de  $\mathbb{R}$ ,  $u, v : I \rightarrow J$  dérivables,  $f : J \rightarrow \mathbb{K}$  continue.

L'application  $\varphi : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \end{cases}$  est dérivable sur  $I$  et

$$\forall x \in I, \varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

**Exercice 5 : Ex CCINP 56**

On considère la fonction  $H$  définie sur  $]1, +\infty[$  par

$$H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

1. Montrer que  $H$  est  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction  $u$  définie par  $u(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$  admet une limite finie en  $x=1$ .
3. En utilisant la fonction  $u$  de la question 2., calculer la limite en  $1^+$  de la fonction  $H$ .



Voir exercice du TD : 11, 12

**Propriété 6 : Intégration par parties**

Si  $u, v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,

$$\forall a, b \in I, \int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

**Exercice 6**

Équivalent de  $f(x) = \int_1^x e^t \ln t dt$  en  $+\infty$ .

**Propriété 7 : Changement de variable**

Si  $I$  intervalle,  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow I$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $f$  continue sur  $I$ ,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u) du.$$

**IV CALCUL DE PRIMITIVES ET D'INTÉGRALES (RAPPELS)**



**Méthode 1 : Technique de calcul de primitives et d'intégrales**

**1 Calculs directs**

Il est bien entendu indispensable de connaître ses primitives usuelles (cf formulaire).

On reconnaît souvent une forme  $u' \times v'(u)$  qui s'intègre en  $v \circ u$  (voir aussi le changement de variable)

On peut parfois passer par les complexes : par définition, la partie réelle (imaginaire) de la primitive

est la primitive de la partie réelle (imaginaire).

**2 L'intégration par parties**

Fonction dont la dérivée est plus simple...

...comme par exemple les fonctions  $\ln, \text{Arccos}, \text{Arcsin}, \text{Arctan}$ , etc.

**Exercice 7**

Calculer  $\int \ln x dx$ .

**Abaissement du degré, formule de récurrence**

**Exercice 8**

Calculer  $F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ .

**3 Le changement de variable**

On veut calculer  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$  : C'est en fait le cas où on reconnaît une forme  $\varphi' \times f \circ \varphi$ .

On veut calculer  $\int f(x) dx$

Dans ce cas, il faut écrire  $x = \varphi(t)$  avec  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Mais attention, si on fait un calcul de primitive, il faudra choisir  $\varphi$  **bijective** pour pouvoir à la fin du calcul revenir de  $t$  à  $x$  ( $t = \varphi^{-1}(x)$ ). Si c'est un calcul d'intégrale avec des bornes,  $\varphi$  n'a pas besoin d'être bijective ! (on en revient pas à la première variable.)

Comment déterminer un bon changement de variable ? Pas toujours facile, mais voici quelques tuyaux pour y parvenir.

**4 Les fractions rationnelles**

Parfois, un simple changement de variable, ou des astuces du type  $+1 - 1$  permettent de calculer les primitives.

Si ce n'est pas possible de simplifier « à vue », l'idée est de se ramener à des fractions simples pour utiliser, si  $a \in \mathbb{R}$ , sur  $]a, +\infty[$  ou  $] -\infty, a[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C.$$

Pour se faire on procède à une **décomposition en éléments simples**. Ne pas oublier la partie entière si elle est non nulle.

Il y a un autre cas à traiter : c'est celui pour lequel on obtient un facteur  $ax^2 + bx + c$  au dénominateur sans racine réelle : cela donne dans la décomposition un terme en  $\frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$ , qui se primitive en  $\ln$  et  $\text{Arctan}$  :



- On se débarrasse du  $x$  au numérateur en faisant apparaître la dérivée  $2ax + b$  du dénominateur et on intègre en  $\ln$ ,
- on met sous forme canonique le dénominateur du terme restant et on intègre en  $\text{Arctan}$ .

## 5 Les fonctions trigonométriques

Si on veut intégrer une fonction polynomiale en  $\cos x$  et  $\sin x$ , le plus simple est de linéariser. Cependant, si on a un terme en  $\sin^p x \cos^q x$  avec  $p$  ou  $q$  impair, on peut poser  $t = \cos x$  si  $q$  est impair et  $t = \sin x$  si  $p$  est impaire en utilisant  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ .

Si on veut intégrer une fraction rationnelle en  $\cos x$  et  $\sin x$ , on applique :

### Règles de Bioche

Si «  $f(x)dx$  » est invariant par

- $x \rightarrow -x$ , on pose  $t = \cos x$  ;
- $x \rightarrow \pi - x$ , on pose  $t = \sin x$  ;
- $x \rightarrow \pi + x$ , on pose  $t = \tan x$  ;
- Sinon on pose  $t = \tan \frac{x}{2}$ .

Ne pas oublier le  $dx$  !!

### Exercice 9

Calculer  $I = \int_0^{\pi/2} \sin^5 t dt$ .

### Exercice 10

$\int \frac{1}{\cos x} dx$ .

## 6 Les fonctions hyperboliques

Pour les fonctions faisant intervenir  $\text{ch}$ ,  $\text{sh}$ ,  $\text{th}$  et  $\exp$ , on peut poser  $t = e^x$  ( $\text{ch } x = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right)$ ,  $\text{sh } x = \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right)$ ,  $\text{th}(x) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ .)

Si l'on a une fraction rationnelle en  $\text{ch}$ ,  $\text{sh}$ ,  $\text{th}$ , il peut être plus efficace d'appliquer un changement de variable obtenu grâce aux règles de Bioche appliquées à la fraction rationnelle dans laquelle on aura remplacé mentalement  $\text{ch}$ ,  $\text{sh}$ ,  $\text{th}$  par  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\tan$  respectivement.

## 7 Les fonctions avec radical

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en  $x$  et  $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$  ( $x$  et  $\sqrt{ax+b}$  en particulier), on pose  $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ .
- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en  $x$  et  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  ( $a \neq 0$ ), il faut mettre

ce dernier sous forme canonique pour obtenir du  $\sqrt{\pm(ax+\beta)^2 \pm 1}$  puis poser  $t = ax + \beta$ . Ensuite, pour :

- ★  $\sqrt{t^2 + 1}$  on pose  $t = \text{sh } u$  ( $\text{sh}^2 + 1 = \text{ch}^2$ ) ou  $t = \tan u$  ( $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$ , attention à l'intervalle dans ce cas là.)
- ★  $\sqrt{t^2 - 1}$  on pose  $t = \pm \text{ch } u$  suivant le signe de  $t$ . ( $\text{ch}^2 - 1 = \text{sh}^2$ .)
- ★  $\sqrt{1 - t^2}$  on pose  $t = \sin u$  ou  $t = \cos u$  ( $1 - \cos^2 = \sin^2$  et  $1 - \sin^2 = \cos^2$ .)

### Exercice 11

$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ .



Voir exercice du TD : 1, 2

## V FORMULES DE TAYLOR

### Définition 3

Si  $f$  est  $n$  fois dérivable en  $a$ , son **développement de Taylor** en  $a$  à l'ordre  $n$  est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de  $f$  en  $a$  à l'ordre  $n$  est  $R_n = f - T_n$  (tel que  $f = T_n + R_n$ ).

On sait déjà que si  $f$  est polynomiale de degré  $d$ , pour tout  $n \geq d + 1$ ,  $R_n \equiv 0$ .

On va chercher à :

- exprimer **globalement**  $R_n$  : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement**  $R_n$  : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement**  $R_n$  : c'est la formule de Taylor-Young.



Voir exercice du TD : 17, 18, 19

## 1 Taylor reste intégrale

### Propriété 8 : Formule de Taylor avec reste intégral

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $I$ ,  $a \in I$ . Pour tout  $x \in I$ ,

#### Remarque

R2 – À connaître **PARFAITEMENT**.

Pour s'en rappeler : tester pour  $n = 0$  et plus de  $a$  sous l'intégrale.

## 2 Inégalité de Taylor-Lagrange

### Propriété 9 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $I$ ,  $a \in I$ . Pour tout  $x \in I$ ,

#### Remarque

R3 – Facile, plus de piège. Que retrouve-t-on pour  $p = 0$ ?

### Corollaire 3 : Série exponentielle

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$ .

## 3 Formule de Taylor-Young

### Propriété 10 : Primitivation de DL

Soit  $f : I \rightarrow E$  admettant un  $DL_n(a)$  avec  $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Toute primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  admet un  $DL_{n+1}(a)$

$$F(x) = F(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de  $f$ .

#### Remarque

R4 –  On peut aussi dériver un DL terme à terme à condition de savoir que  $f'$  admet un DL.

### Propriété 11 : Formule de Taylor-Young

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ ,  $a \in I$ .

$$R_n(x) = o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n).$$

#### Remarque

R5 – L'hypothèse du programme officiel est  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$ , mais il suffit qu'elle soit  $n-1$  fois dérivable et que  $f^{(n-1)}$  soit dérivable en  $a$ .