11

Dérivation, convexité des fonctions numériques (MP2I)

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Dérivabilité

1 Nombre dérivé et fonction dérivée

a Dérivabilité en un point, sur un intervalle

Définition 1 : Nombre dérivé, fonction dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$. On dit que f **est dérivable en** a si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite lorsque $h \to 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ et appelée **nombre dérivé de** f **en** a.

Lorsqu'elle existe, on a donc

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I.

On définit alors la fonction dérivée

$$f' = \mathrm{D}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : \left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}\right. .$$

Propriété 1 : DL_1

f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hb + h\cdot\varepsilon(h) = f(a) + hb + \mathrm{o}(h)$$

où $b \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Dans ce cas, $b = f'(a)$.

Corollaire 1 : dérivable $\Longrightarrow$ continue

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

La réciproque est fausse.

b Dérivabilité à gauche, à droite

Définition 2 : Dérivabilité à gauche, à droite

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. f est dite **dérivable à gauche** (respectivement **à droite**) de a lorsque $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche (respectivement à droite) de a, notée $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$).

Propriété 2 : Caractérisation de la dérivabilité

Si $a \in \overset{\circ}{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

On a alors $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$

c Opérations algébriques

Propriété 3 : Opérations algébriques

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) *$f+g$ dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$.*

(ii) *$f \times g$ dérivable en a et*

$$(f\times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) *λf dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*

(iv) *Si g ne s'annule pas, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Propriété 4 : Composée

Soient I, J sont des intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et $a \in I$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g\circ f$ est dérivable en a et

$$(g\circ f)'(a) = f'(a)\times g'\circ f(a).$$

d Dérivée d'une réciproque

Propriété 5 : Dérivée d'une réciproque

Si $f : I \to J$ bijective et dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $\{f(x)\ ;\ x \in I \text{ et } f'(x) \neq 0\}$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

II Dérivées successives et classe d'une fonction

1 Définition

Définition 3 : Dérivées successives et classe d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Lorsque f est dérivable n fois, note $f^{(n)}$ sa dérivée n^{e} tel que $f^{(0)} = f$ et pour tout k, $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
- Si $k \in \mathbb{N}$, f est **de classe $\mathscr{C}^k$ sur I** lorsque f est k fois dérivable et $f^{(k)}$ est continue sur I. On note $\mathscr{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
- f est **de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I** lorsque f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque f est indéfiniment dérivable.

Propriété 6 : Classe d'une dérivée

Si $n \geqslant 1$, f est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) si et seulement si f dérivable et f' est $n-1$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^{n-1}$). Alors $f^n = (f')^{(n-1)}$.

2 Opérations

Propriété 7 : Opérations sur les dérivée d'ordre n

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) *$f + g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et*

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

(ii) *λf est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et*

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

(iii) ***Formule de Leibniz***
$f \times g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(iv) *Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

(v) *Si $h : J \to \mathbb{R}$, tel que $f(I) \subset J$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur J, $f \circ g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

Propriété 8 : Fonctions usuelles

Les fonctions usuelles $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\ln$, ch, sh, th, Arctan et polynomiales ou rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

Les fonctions Arcsin et Arccos sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

$\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes (HP)

Définition 4 : $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes (HP)

$f : I \to J$ est un **$\mathscr{C}^k$-difféomorphisme** lorsque

- f est bijective,
- f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
- f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Propriété 9 : Caractérisation (HP)

Soit $f : I \to J$ bijective de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 1$.

Alors f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme (ie f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

III Applications

1 Condition nécessaire d'extremum local

Définition 5 : Extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

(i) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in I \cap V,\ \ f(x) \geqslant f(a)$ (resp. $f(x) \leqslant f(a)$).

(ii) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local strict** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in I \cap V,\quad f(x) > f(a)$ (resp.$f(x) < f(a)$).

On parle alors d'**extremum local**.
Lorsque $V = \mathbb{R}$, on parle d'**extremum global**.

Définition 6 : point critique

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ tel que f dérivable en a. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $f'(a) = 0$.

Propriété 10 : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ *tel que*

H1 $a \in \mathring{I}$

H2 f *est dérivable en* a

H3 f *admet un extremum local en* a

Alors a *est un pont critique de* f : $f'(a) = 0$.
La réciproque est fausse.

2 Théorème de Rolle

Théorème 1 : Théorème de Rolle

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Si*

H1 f *est continue sur* $[a, b]$

H2 f *est dérivable sur* $]a, b[$

H3 $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a, b[,\quad f'(c) = 0$.

3 Théorème des accroissements finis

Théorème 2 : Théorème des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Si*

H1 f *est continue sur* $[a, b]$

H2 f *est dérivable sur* $]a, b[$

Alors $\exists c \in]a, b[,\quad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ *ie*

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(c).$$

4 Inégalité des accroissements finis

Théorème 3 : Inégalité des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Si*

H1 f *est continue sur* $[a, b]$

H2 f *est dérivable sur* $]a, b[$

H3 $\exists m, M \in \mathbb{R},\quad \forall x \in]a, b[,\quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$

Alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.

Corollaire 2 : 2ᵉ version

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. *Si*

H1 f *est continue sur* I

H2 f *est dérivable sur* $\mathring{I}$

H3 $\exists k \in \mathbb{R},\quad \forall x \in \mathring{I},\quad |f'(x)| \leqslant k$

Alors f *est k-lipschitzienne sur* I, *c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in I,\quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

5 Variation des fonctions dérivables

Théorème 4 : Variation des fonctions dérivables

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, *continue sur* I, *dérivable sur* $\mathring{I}$.

(i) f *est constante sur* I *si et seulement si* $f' \equiv 0$ *sur* $\mathring{I}$.

(ii) f *est croissante (respectivement décroissante) sur* I *si et seulement si* $f' \geqslant 0$ *(respectivement* $f' \leqslant 0$*) sur* $\mathring{I}$.

(iii) f *est strictement croissante (respectivement décroissante) sur* I *si et seulement si* $f' \geqslant 0$ *(respectivement* $f' \leqslant 0$*) sur* $\mathring{I}$ *et* $\left\{x \in \mathring{I} \;\middle|\; f'(x) = 0\right\}$ *ne continent aucun intervalle d'intérieur non vide ie* f' *ne s'annule qu'en des points isolés.*

6 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 5 : Théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 *f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$*

H2 *f est continue en a*

H3 *$f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$*

Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Donc

- *soit $\ell = \pm\infty$ et $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en a,*
- *soit $\ell \in \mathbb{R}$ et f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a.*

Théorème 6 : du prolongement $\mathscr{C}^k$ (HP)

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et $f \in \mathscr{C}^k(I \setminus \{a\})$ telle que $\forall\, i \in [\![0, k]\!]$, $f^{(i)}$ a une limite finie en a. Alors le prolongement de f par continuité en a est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

IV Fonctions convexes d'une variable réelle

I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points.

1 Définitions

Définition 7 : Fonction convexe, concave

- $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **convexe** sur I lorsque
$$\forall x, y \in I,\ \forall t \in [0,1],\ f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$$
- f est dite **concave** sur I lorsque $-f$ est convexe.

Propriété 11 : Caractérisation par interprétation géométrique

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si tout sous-arc de sa courbe est situé en dessous (respectivement au-dessus) de la corde correspondante.

Définition 8 : Épigraphe

La partie $\mathscr{E}(f)$ du plan située au dessus (au sens large) de la courbe de f s'appelle son **épigraphe**.
$$(x, y) \in \mathscr{E}(f) \iff y \geqslant f(x)$$

2 Caractérisations

Ces caractérisations sont à visualiser sur des dessins !

Propriété 12 : Caractérisation avec l'épigraphe

f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe $\mathscr{E}(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Propriété 13 : Caractérisations avec les pentes des cordes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *f est convexe sur I.*

(ii) ***Inégalité des trois cordes** : si $x, y, z \in I$, $x < y < z$,*
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

(iii) ***Croissance des pentes** : pour tout $a \in I$,*
$$\tau_a : \left|\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}\right. \text{ est croissante}$$

3 Cas des fonctions dérivables

Propriété 14 : Caractérisation avec la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I

Corollaire 3 : Caractérisation avec la dérivée seconde

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I.

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si $f'' \geqslant 0$ (respectivement $f'' \leqslant 0$) sur I.

Propriété 15 : Caractérisation avec les tangentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *dérivable sur* I.

f *est convexe (respectivement concave) si et seulement si son graphe est au-dessus (respectivement au dessous) de toutes ses tangentes.*

4 Inégalités de convexité

Propriété 16 : Inégalité de Jensen

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ *tel que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

- *Si* f *est convexe,* $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

  En particulier,

  $$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

- *Si* f *est concave,* $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

  En particulier,

  $$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$