11

Dérivation, convexité, intégration sur un segment des fonctions numériques (MP2I)

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Dérivabilité

1 Nombre dérivé et fonction dérivée

a Dérivabilité en un point, sur un intervalle

Définition 1 : Nombre dérivé, fonction dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$. On dit que f **est dérivable en** a si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite lorsque $h \to 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ et appelée **nombre dérivé de f en a**.

Lorsqu'elle existe, on a donc

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I.

On définit alors la fonction dérivée

$$f' = \mathrm{D}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right. .$$

Remarque : Interprétation géométrique

R1 – Il s'agit de la limite des cordes dont une extrémité est le point $(a, f(a))$ lorsque $x \to a$. D'où l'équation de la tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Si $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \to +\infty$, f n'est pas dérivable en a, mais il y a une tangente verticale.

Propriété 1 : DL$_1$

f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a, c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hb + h\cdot\varepsilon(h) = f(a) + hb + \mathrm{o}(h)$$

où $b \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Dans ce cas, $b = f'(a)$.

Corollaire 1 : dérivable $\Longrightarrow$ continue

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
La réciproque est fausse.

b Dérivabilité à gauche, à droite

Définition 2 : Dérivabilité à gauche, à droite

Si $f: I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. f est dite **dérivable à gauche** (respectivement **à droite**) de a lorsque $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche (respectivement à droite) de a, notée $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$).

Propriété 2 : Caractérisation de la dérivabilité

Si $a \in \overset{\circ}{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
On a alors $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$

c Opérations algébriques

Propriété 3 : Opérations algébriques

Si $f, g: I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f+g$ *dérivable en* a *et* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(ii) $f \times g$ *dérivable en* a *et*
$$(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) λf *dérivable en* a *et* $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

(iv) *Si* g *ne s'annule pas,* $\dfrac{f}{g}$ *est dérivable en* a *et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Remarque

R 2 – Plus généralement, si $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en a, $f_1 \times \dots \times f_n$ l'est aussi et
$$\left(f_1 \times \dots \times f_n\right)'(a) = \sum_{k=1}^{n} f_1(a) \dots, f_{k-1}(a) f'_k(a) f_{k+1}(a) \cdots f_n(a).$$

Propriété 4 : Composée

Soient I, J sont des intervalles, $f: I \to \mathbb{R}$ et $g: J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a et g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et
$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g' \circ f(a).$$

Remarque

R 3 – Les propriétés de dérivation de somme, produit, combinaison linéaire quotient par une fonction jamais nulle, composée de fonctions dérivable s'étendent naturellement aux fonctions dérivables sur un intervalle.

d Dérivée d'une réciproque

Propriété 5 : Dérivée d'une réciproque

Si $f : I \to J$ bijective et dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $\{f(x)\ ;\ x \in I \text{ et } f'(x) \neq 0\}$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Remarque

R4 – Si $f'(a) = 0$, alors le graphe de f admet une tangente verticale en $b = f(a)$.

R5 – Dans tous les cas, la tangente en $(b, f^{-1}(b)) = (f(a), a)$ à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est l'image par la symétrie d'axe d'équation $y = x$ de la tangente en $(a, f(a))$ à $\mathscr{C}_f$.

R6 – Pour retrouver la formule, il suffit de dériver $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$.

II DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET CLASSE D'UNE FONCTION

1 Définition

Définition 3 : Dérivées successives et classe d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Lorsque f est dérivable n fois, note $f^{(n)}$ sa dérivée ne tel que $f^{(0)} = f$ et pour tout k, $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
- Si $k \in \mathbb{N}$, f est **de classe $\mathscr{C}^k$ sur** I lorsque f est k fois dérivable et $f^{(k)}$ est continue sur I. On note $\mathscr{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
- f est **de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur** I lorsque f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque f est indéfiniment dérivable.

Remarque

R7 – On peut être k fois dérivable sans être de classe $\mathscr{C}^k$.
Par exemple $f : x \mapsto x^2 \sin\frac{1}{x}$ est dérivable en 0 sans y être de classe $\mathscr{C}^1$.

Propriété 6 : Classe d'une dérivée

Si $n \geqslant 1$, f est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) si et seulement si f dérivable et f' est $n-1$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^{n-1}$).

Alors $f^n = (f')^{(n-1)}$.

2 Opérations

Propriété 7 : Opérations sur les dérivée d'ordre n

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) *$f + g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et*

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

(ii) *λf est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et*

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

(iii) ***Formule de Leibniz***
$f \times g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(iv) *Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

(v) *Si $h : J \to \mathbb{R}$, tel que $f(I) \subset J$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur J, $f \circ g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

Remarque

R 8 – Le formule de Faa di Bruno (hors-programme) donne une expression de $(f \circ g)^{(n)}$.

Exercice 1 : CCINP 3

Propriété 8 : Fonctions usuelles

Les fonctions usuelles $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\ln$, ch, sh, th, Arctan *et polynomiales ou rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.*
Les fonctions Arcsin *et* Arccos *sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur* $]-1,1[$.
$\sqrt{\cdot}$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

3 $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes (HP)

Définition 4 : $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes (HP)

$f : I \to J$ est un **$\mathscr{C}^k$-difféomorphisme** lorsque
- f est bijective,
- f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
- f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Remarque

R 9 – Un $\mathscr{C}^0$-difféomorphisme est un homéomorphisme.

Propriété 9 : Caractérisation (HP)

Soit $f : I \to J$ bijective de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 1$.
Alors f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme (ie f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

Remarque

R 10 – Comme f' est continue, si elle ne s'annule pas, elle garde un signe constant et f est strictement monotone, donc injective automatiquement.

III APPLICATIONS

1 Condition nécessaire d'extremum local

Définition 5 : Extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

(i) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in I \cap V, \quad f(x) \geqslant f(a)$ (respectivement $f(x) \leqslant f(a)$).

(ii) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local strict** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in I \cap V, \quad f(x) > f(a)$ (respectivement $f(x) < f(a)$).

On parle alors d'**extremum local**.
Lorsque $V = \mathbb{R}$, on parle d'**extremum global**.

Remarque

R 11 – Ainsi, f admet un minimum (respectivement maximum) local en a si et seulement si

$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant f(a)$$

(respectivement $f(x) \leqslant f(a)$). si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad a + h \in I \text{ et } |h| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow f(a+h) \geqslant f(a)$$

(respectivement $f(a+h) \leqslant f(a)$).

Définition 6 : point critique

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ tel que f dérivable en a. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $f'(a) = 0$.

Propriété 10 : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 $a \in \mathring{I}$

H2 *f est dérivable en a*

H3 *f admet un extremum local en a*

Alors a est un pont critique de f : $f'(a) = 0$.
La réciproque est fausse.

Remarque

R 12 – Les extrema sont à chercher **parmi** les points intérieurs critiques et les points au bord.

2 Théorème de Rolle

Théorème 1 : Théorème de Rolle

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a<b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Si*

H1 f *est continue sur* $[a,b]$

H2 f *est dérivable sur* $]a,b[$

H3 $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0$.

Remarque

R 13 – La conclusion s'écrit aussi $\exists t \in]0,1[, \quad f'(a+th)) = 0$ où $h = b-a$.

R 14 – **Interprétation cinématique** : Si un mobile M a une trajectoire **rectiligne** tel que $\mathrm{M}(t_0) = \mathrm{M}(t_1)$ alors il existe un instant $t \in]t_0, t_1[$ tel que $v_{\mathrm{M}}(t) = 0$.

R 15 – ⚠ : Faux pour des fonctions qui ne sont pas à valeurs réelles !

3 Théorème des accroissements finis

Théorème 2 : Théorème des accroissements finis

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a<b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Si*

H1 f *est continue sur* $[a,b]$

H2 f *est dérivable sur* $]a,b[$

Alors $\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *ie* $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$.

Remarque

R 16 – Le résultat s'écrit encore $\exists t \in]0,1[, \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a+t(b-a)) = 0$ ie $f(a+h) = f(a) + hf'(a+th)$ où $h = b-a$.

R 17 – Ce résultat généralise a priori le théorème de Rolle, mais est en fait strictement équivalent car on va utiliser ce théorème dans la preuve.

R 18 – Non valable pour des fonctions à valeurs complexes de nouveau.

4 Inégalité des accroissements finis

Théorème 3 : Inégalité des accroissements finis

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a<b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Si*

H1 f *est continue sur* $[a,b]$

H2 f *est dérivable sur* $]a,b[$

H3 $\exists m, M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]a,b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$

Alors $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$.

Remarque

R 19 – Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\forall\, x \in [a,b],\quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$, comme $a<b$, on peut intégrer membre à membre l'inégalité entre a et b et retrouver le résultat.

Corollaire 2 : 2e version

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. *Si*

H1 f *est continue sur* I

H2 f *est dérivable sur* $\mathring{I}$

H3 $\exists\, k \in \mathbb{R},\quad \forall\, x \in \mathring{I},\quad \left|f'(x)\right| \leqslant k$

Alors f *est* k*-lipschitzienne sur* I*, c'est-à-dire*

$$\forall\, x, y \in I,\quad \left|f(x)-f(y)\right| \leqslant k\left|x-y\right|.$$

Remarque

R 20 – En particulier, si f est dérivable sur $\mathring{I}$, f est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur $\mathring{I}$.

R 21 – Si f est classe $\mathscr{C}^1$, on peut à nouveau retrouver le résultat directement en intégrant $|f'| \leqslant k$ entre x et y (attention à l'ordre des bornes...)

R 22 – Cette fois, c'est aussi valable pour des fonctions à valeurs complexes.

5 Variation des fonctions dérivables

Théorème 4 : Variation des fonctions dérivables

Soit $f : I \to \mathbb{R}$*, continue sur* I*, dérivable sur* $\mathring{I}$*.*

(i) f *est constante sur* I *si et seulement si* $f' \equiv 0$ *sur* $\mathring{I}$*.*

(ii) f *est croissante (respectivement décroissante) sur* I *si et seulement si* $f' \geqslant 0$ *(respectivement* $f' \leqslant 0$*) sur* $\mathring{I}$*.*

(iii) f *est strictement croissante (respectivement décroissante) sur* I *si et seulement si* $f' \geqslant 0$ *(respectivement* $f' \leqslant 0$*) sur* $\mathring{I}$ *et* $\left\{x \in \mathring{I} \;\middle|\; f'(x)=0\right\}$ *ne continent aucun intervalle d'intérieur non vide ie* f' *ne s'annule qu'en des points isolés.*

Remarque

R 23 – ⚠ Si f est définie sur D réunion d'intervalles, $f'=0$ dit que f est constante sur chaque intervalle, $f' \geqslant 0$ dit que f est croissante sur chaque intervalle...

LA CONSTANTE DÉPEND DE L'INTERVALLE !

6 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 5 : Théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

- **H1** f *est dérivable sur* $I \setminus \{a\}$
- **H2** f *est continue en* a
- **H3** $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Donc

- *soit* $\ell = \pm\infty$ *et* $\mathscr{C}_f$ *admet une tangente verticale en* a,
- *soit* $\ell \in \mathbb{R}$ *et* f *est dérivable en* a, $f'(a) = \ell$ *et* f' *est continue en* a.

Remarque

R 24 – Si f' n'a pas de limite en a, on ne peut pas conclure.

Exemple

E 1 – $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0.

E 2 – $f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0.

R 25 – Il faut que f soit continue en a : par exemple, $f : x \mapsto \delta_{x,0}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et pourtant f n'est pas dérivable en 0.

R 26 – Ce théorème donne aussi la continuité au point de la dérivée : et donc un caractère localement $\mathscr{C}^1$. Cependant, une fonction peut être dérivable sans que la dérivée soit continue. Donc ne pas pouvoir appliquer le théorème de la limite de la dérivée ne signifie pas que la fonction n'est pas dérivable !

Exercice 2 : CCINP 4

Théorème 6 : du prolongement $\mathscr{C}^k$ (HP)

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, *et* $f \in \mathscr{C}^k(I \setminus \{a\})$ *telle que* $\forall\, i \in [\![0, k]\!]$, $f^{(i)}$ *a une limite finie en* a. *Alors le prolongement de* f *par continuité en* a *est une fonction de classe* $\mathscr{C}^k$ *sur* I.

7 Convexité

IV Fonctions convexes d'une variable réelle

I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points.

1 Définitions

Définition 7 : Fonction convexe, concave

- $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **convexe** sur I lorsque

$$\forall x, y \in I, \quad \forall t \in [0,1], \quad f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$$

- f est dite **concave** sur I lorsque $-f$ est convexe.

Remarque

R 27 – On pourrait se contenter de $t \in]0,1[$.

R 28 – Concave n'est pas le contraire de convexe !
On peut être les deux à la fois (quand ?) et on n'est en général ni l'un ni l'autre.

La définition donne immédiatement l'interprétation géométrique suivante :

Propriété 11 : Caractérisation par interprétation géométrique

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si tout sous-arc de sa courbe est situé en dessous (respectivement au-dessus) de la corde correspondante.

Remarque

R 29 – Un point en lequel il y a un changement de concavité est appelé **point d'inflexion**.

Définition 8 : Épigraphe

La partie $\mathscr{E}(f)$ du plan située au dessus (au sens large) de la courbe de f s'appelle son **épigraphe**.

$$(x,y) \in \mathscr{E}(f) \iff y \geqslant f(x)$$

2 Caractérisations

Ces caractérisations sont à visualiser sur des dessins !

Propriété 12 : Caractérisation avec l'épigraphe

f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe $\mathscr{E}(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Propriété 13 : Caractérisations avec les pentes des cordes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe sur I.

*(ii) **Inégalité des trois cordes** : si $x, y, z \in I$, $x < y < z$,*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

(iii) ***Croissance des pentes*** *: pour tout $a \in I$,*

$$\tau_a : \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right. \quad \textit{est croissante}$$

Démonstration

$(i) \Rightarrow (ii)$ $y = (1-t)x + tz\ldots$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Séparer trois cas suivant la position par rapport à a.

$(iii) \Rightarrow (i)$ τ_x.

Exercice 3

Montrer qu'une fonction convexe sur I admet en chaque point de $\mathring{I}$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite et en déduire que f est continue sur $\mathring{I}$.

Est-ce le cas sur I ?

3 Cas des fonctions dérivables

Propriété 14 : Caractérisation avec la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I

Démonstration

Si f est convexe, dans l'inégalité des trois cordes, faire tendre z vers x à gauche puis vers y à droite.
Si f' est croissante, dériver $\varphi : z \mapsto f((1-t)z + ty) - (1-t)f(z) - tf(y))$ sur $[x, y]$.

Corollaire 3 : Caractérisation avec la dérivée seconde

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I.

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si $f'' \geqslant 0$ (respectivement $f'' \leqslant 0$) sur I.

Propriété 15 : Caractérisation avec les tangentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si son graphe est au-dessus (respectivement au dessous) de toutes ses tangentes.

Démonstration

- Si la courbe de f est au dessus de ses tangentes, posons $x < y$. Soit $t \in]0,1[$, $z = (1-t)x + ty$ et donc $t = \dfrac{z-x}{y-x}$, le fait que la courbe de f est au dessus de la tangente en z, d'équation $Y = f'(z)(X-z) + f(z)$ se traduit par $f(x) \geqslant f'(z)(x-z) + f(z)$ et $f(y) \geqslant f'(z)(y-z) + f(z)$ ce qui donne
$$(y-z)\big(f(z) - f(x)\big) \leqslant (z-x)(y-z)f'(z) \leqslant (z-x)\big(f(y) - f(z)\big)$$
(avec $z - x < 0$ et $y - z > 0$) et donc $(y-x)f(z) \leqslant (y-z)f(x) + (z-x)f(y)$ et enfin $f(z) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$.
- Si f est convexe et dérivable, pour $a \in I$, on veut montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$. Pour cela, on pose $\varphi_a : x \in I \mapsto f(x) - f'(a)(x-a)$, dérivable sur I, de dérivée $\varphi'_a : x \mapsto f'(x) - f'(a)$. Par croissance de f', φ_a est décroissante avant a et croissante après, donc admet un minimum en a, avec $\varphi_a(a) = f(a)$, ce qui permet bien de trouver l'inégalité voulue.

4 Inégalités de convexité

Propriété 16 : Inégalité de Jensen

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, $(x_1,\dots,x_n) \in I^n$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,1]^n$ *tel que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

- *Si* f *est convexe,* $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.
- *Si* f *est concave,* $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Démonstration

Cas f convexe. Récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on pose P_n : « pour tous $(x_1,\dots,x_n) \in I^n$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$ ».

Initialisation : rien à faire pour $n = 1$. Pour $n = 2$, c'est la définition d'une fonction convexe.

Hérédité : Soit un $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel P_n est vraie et soient $(x_1,\dots,x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}) \in [0,1]^{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors tous les autres λ_i sont nuls et il n'y a rien à faire.

Sinon, $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1} \neq 0$, on pose $x = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \lambda x + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1-\lambda_{n+1})x + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

Alors, par définition de la convexité, puis par HR, comme les $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$ sont positifs de somme 1,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant (1-\lambda_{n+1}) f(x) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

ce qui établit la récurrence.

Remarque

R 30 – Se rencontre souvent avec des poids tous égaux à $\frac{1}{n}$, ce qui donne $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

Exemple : Très classiques

E 3 – Inégalité arithmético-géométrique : pour tout $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_*^+$, $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$. Qu'obtient-on en remplaçant x_i par $\frac{1}{x_i}$?

E 4 – $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$. $\qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x$.

E 5 – $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x$.

V QUE FAUT-IL SAVOIR FAIRE ?

- Savoir démontrer qu'une fonction dérivable ou deux fois dérivable est convexe.

- Reconnaître une inégalité de convexité, sous forme de somme ou de produit (et donc d'abord écrire l'inégalité « générique », avec les $1/n$ (surtout) ou avec les λ_i (un peu quand même).)
- Savoir traduire par une inégalité le fait que le graphe d'une fonction convexe est en-dessus de ses tangentes.
- Savoir que $\ln(1+x) \leqslant x$ si $x \geqslant -1$.
- Savoir passer de la « convexité pour 2 » à la « convexité pour n ».
- Savoir dessiner une fonction convexe...