10

Réduction 1re partie : point de vue géométrique

Dans tout le chapitre, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, mais se généralise au cas d'un corps quelconque, avec la prudence pour certains résultats de devoir travailler dans un corps de caractéristique nulle ($\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ n1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.)

I Sous-espaces stables

1 Point de vue géométrique

Définition 1 : Sous-espace stable, endomorphisme induit

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et F est un sous-espace vectoriel de E, F est dit **stable par** u lorsque $u(F) \subset F$ c'est-à-dire $\forall\, x \in F,\ \ u(x) \in F$.

Lorsque c'est le cas, $u_F : \left|\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}\right.$, appelé **endomorphisme induit par** u **sur** F est bien défini.

Propriété 1 : Caractérisation de la stabilité par une base

Si F est de dimension finie $p > 0$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F, alors F est stable par u si et seulement si $\forall\, j \in [\![1,p]\!],\ \ u(e_j) \in F$.

Propriété 2 : Commutation et stabilité d'image et noyau

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ commutent, l'image et le noyau de l'un sont stables par l'autre.

2 Point de vue matriciel

Propriété 3 : Matrice par bloc et stabilité

Soit $E = F \oplus G$ et $\mathscr{B}$ une base adaptée à cette somme directe, $u \in \mathscr{L}(E)$, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

- *F est stable par u si et seulement si $C = 0$.*
- *G est stable par u si et seulement si $B = 0$.*

Propriété 4 : Généralisation

Soit $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ et $\mathscr{B}$ une base adaptée à cette somme directe, $u \in \mathscr{L}(E)$.

$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale par blocs ($A = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_r \end{pmatrix}$) si et seulement si chaque E_i est stable par u.

On peut alors considérer l'endomorphisme u_i induit par u sur E_i dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_i$ (issue de $\mathscr{B}$) est A_i.

II Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée

1 Cas d'un endomorphisme

Définition 2 : Éléments propres d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

- On appelle **valeur propre** de u tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E$ **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$.
- Un tel vecteur **non nul** est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
- On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

- Si E est de dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de u est appelé son **spectre**, noté $\mathrm{Sp}\, u$ ou $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}\, u$.

Propriété 5 : Droites stables

Les droites stables par u sont les droites engendrées par un vecteur propre de u.

Propriété 6 : Stabilité de sous-espaces propres

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Propriété 7 : Des sous-espaces propres sont en somme directe

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distinctes.
Alors les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ sont en somme directe ie $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$.

Corollaire 1 : Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont libres

Des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants (forment une famille libre).

Corollaire 2 : Majoration du nombre de valeurs propres

Si E est de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $|\mathrm{Sp}\, u| \leqslant \dim E$.

2 Cas d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 3 : Éléments propres d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- On appelle **valeur propre** de A tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$.
- Un tel vecteur **non nul** est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ.
- On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\right\}.$$

- L'ensemble des valeurs propres de A est appelé son **spectre**, noté $\mathrm{Sp}\, A$ ou $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}\, A$.

Propriété 8 : Le spectre d'une matrice est le spectre des endomorphismes qu'elle représente

Si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathscr{B}$ est une base de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A, alors $\mathrm{Sp}\, u = \mathrm{Sp}\, A$.

3 Polynôme caractéristique

Propriété 9 : Valeur propre et déterminant

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \mathrm{id}_E \notin \mathscr{GL}(E)$ si et seulement si $\det(u - \lambda \mathrm{id}_E) = 0$.

Propriété 10 : Version matricielle

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n \notin \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Définition 4 : Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est de dimension finie.

- On appelle **polynôme caractéristique** de A le polynôme $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.
- On appelle **polynôme caractéristique** de u le polynôme $\chi_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{id}_E - u)$.

Propriété 11 : Valeurs propres d'une matrice triangulaire

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses cœfficients diagonaux.

Propriété 12 : du polynômes caractéristique

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- *Les racines de χ_A (respectivement χ_u) sont exactement les valeurs propres de A (respectivement u).*
- *Si $\mathscr{B}$ base de E tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, alors $\chi_u = \chi_A$.*
- *χ_A est de degré n unitaire. Plus précisément,*

$$\chi_A = X^n - (\mathrm{tr}\, A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A.$$

χ_u est de degré n unitaire. Plus précisément,

$$\chi_u = X^n - (\mathrm{tr}\, u) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u.$$

Propriété 13 : Invariants de similitude

Le polynôme caractéristique et le spectre sont des invariants de similitude.

Propriété 14 : Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E stable par u, u_F endomorphisme induit par u sur F.

Alors χ_{u_F} divise χ_u.

Théorème 1 : de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

4 Multiplicité des valeurs propres

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 5 : Multiplicité d'une valeur propre

La **multiplicité** d'une valeur propre λ de u (respectivement A) est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Propriété 15 : Nombre de valeurs propres comptées avec multiplicité

Le nombre de valeurs propres comptées avec leur multiplicités est toujours au plus égal à n (dimension de E ou taille de la matrice).

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il y a toujours égalité.

Propriété 16 : Encadrement de la dimension des sous-espaces propres

Si λ valeur propre de u (respectivement A) d'ordre m_λ,

$$1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda$$

$$\text{(respectivement } 1 \leqslant \dim E_\lambda(A) \leqslant m_\lambda\text{)}.$$

Corollaire 3 : Sous-espace propre associé à une valeur propre simple

Le sous-espace propre associé à une valeur propre simple est de dimension 1.

Propriété 17 : Trace, déterminant et valeurs propres

Si χ_A est scindé, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$, alors $\chi_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$, $\sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i = \operatorname{tr} A$ et $\prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_i} = \det A$.

On a un énoncé analogue pour u.

5 Cas particulier des matrices réelles

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\overline{A}$ la matrice dans laquelle on conjugue tous les cœfficients. On a facilement $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ et $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ lorsque ces opérations sont bien définies.

Propriété 18 : Valeur propre complexe d'une matrice réelle

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, λ valeur propre complexe de A de multiplicité m.

- *$\overline{\lambda}$ est valeur propre de A de multiplicité m.*
- *Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de A associé à λ, $\overline{X}$ est vecteur propre de A associé à $\overline{\lambda}$.*
- *Si $d = \dim E_\lambda(A)$, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $E_\lambda(A)$, alors $(\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_p)$ base de $E_{\overline{\lambda}}(A)$ de dimension d.*

III Diagonalisation

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Diagonalisabilité des endomorphismes

Définition 6 : Diagonalisabilité d'un endomorphisme

u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Propriété 19 : Caractérisation 1, base de vecteurs propres

u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres.

Une telle base est dite **diagonalisante**.

Propriété 20 : Caractérisation 2, somme des sous-espaces propres

u est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres de u est égale à E ($E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} E_\lambda(u)$.)

Propriété 21 : Caractérisation 3, sous-espaces stables induisant des homothéties

u est diagonalisable si et seulement si E est somme directe de sous-espaces stables sur lesquelles u induit une homothétie.

Propriété 22 : Caractérisation 4, somme des dimension des sous-espaces propres

u est diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} \dim E_\lambda(u) = \dim E$.

Propriété 23 : Caractérisation 5, multiplicité algébrique et géométrique égales

u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp} u$, $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$.

Propriété 24 : Condition suffisante 1, χ_u simplement scindé

Si χ_u est simplement scindé, alors u est diagonalisable et tous les sous-espaces propres sont des droites vectorielles (ie de dimension 1).

Corollaire 4 : Condition suffisante 2, n valeurs propres distinctes en dimension n

Si u possède n valeurs propres distinctes en dimension n, alors u est diagonalisable.

2 Matrices carrées diagonalisables

Définition 7 : Diagonalisabilité d'une matrice carrée

A est **diagonalisable** sur $\mathbb{K}$ si et seulement si elle est semblable sur $\mathbb{K}$ à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$ ie $D = P^{-1}AP$.

Propriété 25 : Caractérisation 6, matrice d'un endomorphisme diagonalisable

Si u est n'importe quel endomorphisme représenté par A, alors A est diagonalisable si et seulement si u l'est.

Méthode 1 : Diagonaliser une matrice diagonalisable A

1. Déterminer les valeurs propres, par exemple avec χ_A. (Parfois du bon sens (de l'observation) suffit. Essayer de sommer les colonnes, par exemple. Ou alors s'intéresser au noyau, à la trace, au déterminant... en connaissant le lien avec les valeurs propres, lorsque χ_A est scindé.)
2. Chercher une base de chaque sous-espace propre $E_\lambda(A)$.
   Si on a calculé χ_A par une méthode du pivot de Gauss, on peut reprendre la forme échelonnée finale et évaluer en λ pour finir la résolution du système.
   Savoir tirer rapidement des informations de la matrice $A - \lambda I_n$ en observant les colonnes.
   Sinon, dans tous les cas, déterminer le noyau de $A - \lambda I_n$, c'est résoudre un système homogène dont c'est la matrice, cela peut se faire par le pivot de Gauß directement sur cette matrice.
3. Justifier alors que A est diagonalisable.
4. Déterminer une base de vecteurs propres : il suffit de concaténer des bases de chaque sous-espace propre vu qu'ils sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
5. Calculer P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres (lesquels sont directement les colonnes de P).
6. Poser D la matrice diagonale formée des valeurs propres associées à chaque vecteur propre de la base, dans le même ordre.
7. On a alors $A = PDP^{-1}$ (en appliquant une formule de changement de base à l'endomorphisme canoniquement associé à A.)

3 Applications de la diagonalisation

a Calculs de puissances

Méthode 2

Si on diagonalise $A = PDP^{-1}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, valable dans $\mathbb{Z}$ si A est inversible c'est-à-dire si 0 n'est pas valeur propre.

b Commutant d'une matrice (complément)

Définition 8 : Commutant d'une matrice carrée

Le **commutant** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$.

Propriété 26 : Structure

C'est un sous-espace vectoriel et même une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Méthode 3 : Commutant d'une matrice diagonalisable $A = PDP^{-1}$

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $N = P^{-1}MP$ et on vérifie que M commute avec A si et seulement si N commute avec D.
   C'est facile en passant par les endomorphismes !
2. On détermine directement $\mathcal{C}(D)$ en traduisant $DN = ND$. (Rappel : il est facile de multiplier à gauche ou à droite par une matrice diagonale !)
3. On en déduit $\mathcal{C}(A)$ qui est l'ensemble des PNP^{-1}.

c Racines carrées d'une matrice (complément)

Définition 9 : Racines carrées d'une matrice

Si $M, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M est une **racine carrée** de A lorsque $M^2 = A$. On note $\mathcal{R}(A)$ l'ensemble des racines carrées de A.

Méthode 4 : Racines carrées d'une matrice diagonalisable $A = PDP^{-1}$

Même principe que pour le commutant.

1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $N = P^{-1}MP$ et on vérifie que M racine carrée de A si et seulement si N racine carrée de D.
2. On détermine directement $\mathcal{R}(D)$ en traduisant $N \in \mathcal{C}(D)$ et $N^2 = D$.
3. On en déduit $\mathcal{R}(A)$ qui est l'ensemble des PNP^{-1}.

À noter que cette méthode s'adapte à d'autres équations que $M^2 = A$.

d Suites récurrentes

Méthode 5 : Terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène $u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u_{n+i}$

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$.
2. On se ramène à $X_{n+1} = AX_n$, ce qui donne pour tout n, $X_n = A^n X_0$.
3. On peut, en diagonalisant $A = PDP^{-1}$ (si possible), s'affranchir du calcul de P^{-1} puis de celui de A^n en posant $Y_n = P^{-1}X_n$, ce qui donne $X_n = PD^nY_0$.
4. On en déduit l'expression de u_n en fonction de n.

IV TRIGONALISATION

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Définition

Définition 10 : endomorphisme et matrice trigonalisable

- $u \in \mathcal{L}(E)$ est **trigonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire lorsqu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PTP^{-1}$.

Propriété 27 : Caractérisation géométrique

A est trigonalisable si et seulement si n'importe quel endomorphisme qu'elle représente l'est.

Propriété 28 : Caractérisation par χ scindé

u (respectivement A) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Corollaire 5 : Trigonalisation automatique dans $\mathbb{C}$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tous les endomorphismes et toutes les matrices sont trigonalisables.

2 Mise en pratique en dimension 2 ou 3

Méthode 6 : Trigonalisation en dimension 2

On suppose que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, alors A admet une valeur propre double λ et $\dim E_\lambda(A) = 1$.

1. On détermine $\binom{x_1}{y_1}$ vecteur propre associé à λ.
2. On complète en $\left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}\right)$ base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (par exemple en piochant dans la base canonique).
3. Alors $A = P\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.

On peut même se ramener à une matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ en cherchant $\binom{x_2}{y_2}$ tel que $A\binom{x_2}{y_2} = \binom{x_1}{y_1} + \lambda\binom{x_2}{y_2}$.

Méthode 7 : Trigonalisation en dimension 3 avec deux valeurs propres

On suppose que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est **trigonalisable mais non diagonalisable**, et que A admet une valeur propre simple λ et une valeur propre double μ.

Alors $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\mu(A) = 1$.

On montre que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

1. On détermine $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à λ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à μ.
2. On cherche $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ tel que $A\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$.
3. On vérifie que $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}\right)$ est un base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
4. Alors $A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$.

V Endomorphismes et matrices nilpotentes

1 Définition

Définition 11 : Endomorphisme et matrice nilpotents et indice de nilpotence

$u \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est dit **nilpotent** lorsqu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (respectivement $A^p = 0_n$).

Le plus petit $p \geqslant 1$ vérifiant cette propriété est appelé **indice de nilpotence**.

2 Propriétés

Propriété 29 : Caractérisation

u est nilpotent si et seulement si u est trigonalisable et $\operatorname{Sp} u = \{0\}$.

Dans ce cas, $\chi_u = X^n$ où $n = \dim E$.

Idem avec des matrices.

Propriété 30 : Majoration de l'indice de nilpotence

L'indice de nilpotence est toujours majoré par $n = \dim E$.