Groupe symétrique et déterminant (MP2I)

1 Groupe symétrique

Définition 1 : Permutation, groupe symétrique

Si E est un ensemble, on appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E. On note $\mathfrak{S}(E)$ leur ensemble.

Si $E = [\![1,n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{S}_n$ appelé **groupe symétrique d'ordre n (ou de degré n)** cet ensemble.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Propriété 1 : Structure

$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe d'ordre (ie de cardinal) $n!$, non abélien dès que $n \geqslant 3$.

Définition 2 : Support

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, son **support** est l'ensemble des éléments de $[\![1,n]\!]$ qui **ne sont pas** invariants par σ.

Propriété 2 : Commutation de permutations à supports disjoints

Deux permutations à supports disjoints commutent.

Définition 3 : Transposition, cycle

- Une **transposition** τ est une permutation qui échange deux éléments i et j de $[\![1,n]\!]$, et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i,j\}$.
  On la note $\tau = (i\ j)$ ou parfois $\tau_{i,j}$.
  $\tau_{i,j}(i) = j$, $\tau_{i,j}(j) = i$ et si $k \notin \{i,j\}$, $\tau_{i,j}(k) = k$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant p \leqslant n$.
  On appelle **p-cycle** une permutation c de $\mathfrak{S}_n$ qui permute circulairement p éléments $i_1, i_2, \dots, i_n$ de $[\![1,n]\!]$ et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i_1, \dots, i_p\}$ et telle que

$$c(i_1) = i_2\ ;\ c(i_2) = i_3\ ;\ \cdots\ ;\ c(i_{p-1}) = i_p\ ;\ c(i_p) = i_1$$

  p est la **longueur** du cycle c. On note $c = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_p)$.

Théorème 1 : Unique décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation se décompose en produit (composée) de cycles à supports disjoints. La décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Corollaire 1 : Décomposition en produit de transpositions (non unique)

Toute permutation se décompose en produit (composée) de transpositions.

Définition 4 : Inversions, signature

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** par σ tout couple (i,j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions par σ.

On appelle **signature** de σ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \in \{-1,1\}$.

On vérifie que $\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

Une permutation σ est dite **paire** lorsque $I(\sigma)$ est pair et donc $\varepsilon(\sigma) = 1$. Elle est dite **impaire** dans le cas contraire.

Théorème 2 : Morphisme de signature

Soit $n \geqslant 2$. L'application

$$\varepsilon : \left| \begin{array}{ccc} (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow & (\{-1,1\}, \times) = (\mathbb{U}_2, \times) \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupe, ie si $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Propriété 3 : de la signature

(i) *Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de N transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$.*
En particulier, cette décomposition n'est pas unique mais la parité du nombre de termes est toujours celle de la permutation.

(ii) *Si c est un p-cycle, $\varepsilon(c) = (-1)^{p-1}$.*

(iii) *Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) = \varepsilon(\sigma)$.*

2 Formes n-linéaires

Définition 5 : Application n-linéaire

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Une application $f : E^n \to F$ est dite **n-linéaire** lorsque pour tout $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, et tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$f_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{array} \right.$$

est linéaire. (Linéarité par rapport à la i^e variable.) c'est-à-dire $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n, \ \forall i \in [\![1, n]\!], \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x} + \lambda \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) &= f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \\ &\quad + \lambda f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{aligned}$$

On note $\mathscr{L}_n(E, F)$ l'ensemble des formes n-linéaires.

Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n-linéaire**.

Propriété 4 : Espace vectoriel de applications n-linéaires

$\mathscr{L}_n(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 6 : Symétrie, antisymétrie et caractère alterné

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E, \mathbb{K})$.

- f est dite **symétrique** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n, \ \forall i \neq j$,
$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n).$$
- f est dite **antisymétrique** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n, \ \forall i \neq j$,
$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) = -f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n).$$
- f est dite **alternée** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n, \ \forall i \neq j$,
$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Propriété 5 : Caractérisations

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E, \mathbb{K})$.

(i) f est symétrique si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \ \forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$,
$$f(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(n)}) = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n).$$

(ii) f est antisymétrique si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \ \forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$,
$$f(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n).$$

(iii) f est alternée si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$,
$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \text{ liée} \Longrightarrow f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Propriété 6 : Équivalence entre alternée et antisymétrique

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire. Alors f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

Théorème 3 : fondamental

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$.

Si $n = \dim E$, l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

3 Déterminant

a Définitions

On fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.

Définition 7 : Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

On appelle **déterminant dans la base** $\mathscr{B}$ l'unique forme n-linéaire alternée sur E notée $\det_{\mathscr{B}}$ telle que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Si pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $\vec{x}_j \in E$ de coordonnées $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ dans $\mathscr{B}$, alors

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n}$$

On note

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Propriété 7 : du déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ des bases de E.

(i) ***Formule de changement de base** :* $\det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}$.

(ii) $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$ *et* $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \left(\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\right)^{-1}$.

(iii) $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ *est libre/une base de E si et seulement si* $\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Propriété 8 : Interprétation géométrique

(i) *Si $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

(ii) *Si $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$.*

On montre que si $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$. On en déduit la définition :

Définition 8 : Déterminant d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u le scalaire

$$\det u = \det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) = \det_{(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)}(u(\vec{e}_1),\dots,u(\vec{e}_n))$$

où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E.

Propriété 9 : du déterminant d'un endomorphisme

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

(i) $\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E$,
$\det_{\mathscr{B}}(u(\vec{x}_1),\dots,u(\vec{x}_n)) = \det u \times \det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$.

(ii) $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.

(iii) $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.

(iv) ⚠ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, , $\det(\lambda u) = \lambda^{n} \det u$.

(v) $u \in \mathscr{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.

(vi) $\det : (\mathscr{GL}(E),\circ) \to (\mathbb{K}^*,\times)$ *est un morphisme de groupes.*

(vii) *Si* $u \in \mathscr{GL}(E)$, $\det\left(u^{-1}\right) = (\det u)^{-1}$.

Définition 9 : du déterminant d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$. On définit le **déterminant** de A par

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}.$$

Propriété 10 : du déterminant d'une matrice carrée

(i) *Si $C_1,\dots,C_n$ sont les vecteurs colonnes de A et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$,* $\det A = \det_{\mathscr{B}}(C_1,\dots,C_n)$.

(ii) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathscr{L}(E)$ représenté par A dans une base de E, alors $\det A = \det u$.*

(iii) $\det I_n = 1$.

(iv) *Si* $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det AB = \det A \det B$.

(v) ⚠ *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,* $\det(\lambda A) = \lambda^{n} \det A$.

(vi) $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$.

(vii) $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$.

(viii) $\det : (\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}),\times) \to (\mathbb{K}^*,\times)$ *est un morphisme de groupes.*

(ix) *Si A est inversible,* $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.

(x) *Des matrices semblables ont même déterminant : le déterminant est un invariant de similitude.*

b Calculs

Propriété 11 : Opérations sur un déterminant

(i) *Si une ligne ou une colonne est nulle, ou une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.*

(ii) *On ne change pas le déterminant avec les opérations*

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k\neq i} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_j \leftarrow C_j + \sum_{k\neq i} \lambda_k C_k$$

(transvections successives.)

(iii) *En multipliant par λ une ligne ou une colonne, on multiplie par λ le déterminant.*

(iv) *Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1. Plus généralement, si on permute les lignes ou les colonnes avec une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.*

(v) *Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses cœfficients diagonaux.*

Définition 10 : Mineurs, cofacteurs, comatrice

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- On appelle **mineur** d'indice (i,j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu en retirant L_i et C_j à A.
- On appelle **cofacteur** d'indice (i,j) le nombre $C_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.
- On appelle **comatrice** de A la matrice de ses cofacteurs :

$$\tilde{A} = \operatorname{Com} A = (C_{i,j})_{i,j} = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\right)_{i,j}.$$

Propriété 12 : Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(*i*) ***Développement par rapport à*** L_i $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}a_{i,j}.$$

(*ii*) ***Développement par rapport à*** C_j $\forall j \in [\![1, n]\!]$,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}a_{i,j}.$$

Propriété 13 : Déterminant de matrice triangulaire par blocs

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, *alors*

$$\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Propriété 14 : Déterminant de Vandermonde

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} V(x_1,\ldots,x_n) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i). \end{aligned}$$

c Formule de la comatrice

Propriété 15 : Formule de la comatrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors*

$$A \times (\operatorname{Com} A)^\intercal = (\operatorname{Com} A)^\intercal \times A = \det(A) \cdot I_n.$$

Si, de plus, A *est inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{Com} A)^\intercal.$$

d Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Définition 11 : Avoir même orientation qu'une base

On dit qu'une base $\mathscr{B}$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel **a même orientation** qu'une autre base $\mathscr{B}'$ lorsque

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \det\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right) > 0.$$

Propriété 16 : Relation d'équivalence

C'est une relation d'équivalence avec exactement deux classes d'équivalences.

Définition 12 : Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Orienter un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est décider qu'une base est **directe**. Alors toutes les bases de même orientation sont dites directes.

Toutes les autres, qui ont même orientation entre elles, sont dites **indirectes**.

e Formules de Cramer (HP)

Propriété 17 : Formules de Cramer (HP)

Soit (S) *un système de Cramer, c'est-à-dire à* n *équations et* n *inconnues et de matrice* $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$. *On sait que* $(S) : Ax = b$ *admet une unique solution* $x = (x_1 \cdots x_n)^\intercal \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soient $C_1, \ldots, C_n$ *les colonnes de* A. *Alors pour tout* $j \in [\![1, n]\!]$,

$$x_j = \frac{\det\left(C_1 \middle| \cdots \middle| C_{j-1} \middle| b \middle| C_{j+1} \middle| \cdots \middle| C_n\right)}{\det A}.$$