9

Groupe symétrique et déterminant (MP2I)

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Compléments d'algèbre linéaire	
Transvections par blocs. Invariance du déterminant.	
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	

Table des matières

1 Groupe symétrique

Définition 1 : Permutation, groupe symétrique

Si E est un ensemble, on appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E. On note $\mathfrak{S}(E)$ leur ensemble.

Si $E = [\![1, n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{S}_n$ appelé **groupe symétrique d'ordre n (ou de degré n)** cet ensemble.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Remarque

R 1 – Attention ! $\mathfrak{S}_n$ n'est pas de cardinal n mais $n!$ (!)

Propriété 1 : Structure

$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe d'ordre (ie de cardinal) $n!$, non abélien dès que $n \geqslant 3$.

Définition 2 : Support

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, son **support** est l'ensemble des éléments de $[\![1, n]\!]$ qui **ne sont pas** invariants par σ.

Propriété 2 : Commutation de permutations à supports disjoints

Deux permutations à supports disjoints commutent.

Exercice 1 : Centre de $\mathfrak{S}_n$

1. **Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, et $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(i\ j)$ commutent, $\{i,j\}$ est stable par σ. La réciproque est-elle vraie ?**
2. **Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$ le centre de $\mathfrak{S}_n$, partie de $\mathfrak{S}_n$ des permutations commutant avec toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$ est $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{N}_n}\}$. Étudier le cas où $n = 2$.**

Définition 3 : Transposition, cycle

- Une **transposition** τ est une permutation qui échange deux éléments i et j de $[\![1,n]\!]$, et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i,j\}$.
  On la note $\tau = (i\ j)$ ou parfois $\tau_{i,j}$.
  $\tau_{i,j}(i) = j$, $\tau_{i,j}(j) = i$ et si $k \notin \{i,j\}$, $\tau_{i,j}(k) = k$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant p \leqslant n$.
  On appelle **p-cycle** une permutation c de $\mathfrak{S}_n$ qui permute circulairement p éléments $i_1, i_2, \dots, i_n$ de $[\![1,n]\!]$ et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i_1, \dots, i_p\}$ et telle que

$$c(i_1) = i_2\ ;\ c(i_2) = i_3\ ;\ \cdots\ ;\ c(i_{p-1}) = i_p\ ;\ c(i_p) = i_1$$

  p est la **longueur** du cycle c. On note $c = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_p)$.

Exercice 2 : Conjugaison de cycle (souvent utile)

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et c un cycle, décrire $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

Théorème 1 : Unique décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation se décompose en produit (composée) de cycles à supports disjoints. La décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Corollaire 1 : Décomposition en produit de transpositions (non unique)

Toute permutation se décompose en produit (composée) de transpositions.

Définition 4 : Inversions, signature

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** par σ tout couple (i,j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.
On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions par σ.
On appelle **signature** de σ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \in \{-1,1\}$.
On vérifie que $\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.
Une permutation σ est dite **paire** lorsque $I(\sigma)$ est pair et donc $\varepsilon(\sigma) = 1$. Elle est dite **impaire** dans le cas contraire.

Remarque

R 2 – La définition avec les inversions peut être oubliée tout de suite. Ce n'est pas ce qui importe dans la signature : il vaut mieux savoir se ramener à des cycles ou à des transpositions (voir ci-après).

Théorème 2 : Morphisme de signature

Soit $n \geqslant 2$. L'application

$$\varepsilon : \begin{array}{|ccc} (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow & (\{-1,1\}, \times) = (\mathbb{U}_2, \times) \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array}$$

est un morphisme de groupe, ie si $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Propriété 3 : de la signature

(i) *Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de N transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$.*
En particulier, cette décomposition n'est pas unique mais la parité du nombre de termes est toujours celle de la permutation.

(ii) *Si c est un p-cycle, $\varepsilon(c) =$*

(iii) *Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) = \varepsilon(\sigma)$.*

Voir exercice du TD : 4 à 18

2 Formes n-linéaires

Définition 5 : Application n-linéaire

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application $f : E^n \to F$ est dite **n-linéaire** lorsque pour tout $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, et tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$f_i : \begin{array}{|ccc} E & \longrightarrow & F \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{array} \quad \text{est linéaire.}$$

(Linéarité par rapport à la i^{e} variable.) c'est-à-dire $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) + \lambda f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n)$$

On note $\mathscr{L}_n(E, F)$ l'ensemble des formes n-linéaires.
Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n-linéaire**.

Propriété 4 : Espace vectoriel de applications n-linéaires

$\mathscr{L}_n(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 6 : Symétrie, antisymétrie et caractère alterné

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E, \mathbb{K})$.

- f est dite **symétrique** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, $\forall i \neq j$,
$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n).$$
- f est dite **antisymétrique** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, $\forall i \neq j$,
$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) = -f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n).$$
- f est dite **alternée** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, $\forall i \neq j$,
$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Propriété 5 : Caractérisations

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.

(i) f est symétrique si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n$,

$$f(\vec{x}_{\sigma(1)},\dots,\vec{x}_{\sigma(n)}) = f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n).$$

(ii) f est antisymétrique si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n$,

$$f(\vec{x}_{\sigma(1)},\dots,\vec{x}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n).$$

(iii) f est alternée si et seulement si $\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n$,

$$(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \text{ liée} \Longrightarrow f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

Propriété 6 : Équivalence entre alternée et antisymétrique

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$ une forme linéaire. Alors f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

Démonstration

Si f est alternée, $i \neq j$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i+\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i+\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n) &= 0_{\mathbb{K}} \\ &= f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n) + f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n) \\ &\quad + f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n) + f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n) \\ &= f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n) \\ &\quad + f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n). \end{aligned}$$

Donc f est antisymétrique.

Si f est antisymétrique, en permutant, $f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n) = -f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n)$ donc $2_{\mathbb{K}} f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}$ et donc si $2_K \neq 0_K$, $f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}$ et f est alternée. ■

Remarque

R 3 – Le sens réciproque est vraie car $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, c'est-à-dire si $2_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Théorème 3 : fondamental

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$.

Si $n = \dim E$, l'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Démonstration

L'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est facilement un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.

Soient $f \in \Lambda_n(E)$, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E. On a déjà vu que si on note $(x_{1,j},\dots,x_{n,j})$ les coordonnées de $\vec{x}_j \in E$ dans la base $\mathscr{B}$, donc $\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j}\vec{e}_i$, alors

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1,1}\vec{e}_{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^{n} x_{i_n,n}\vec{e}_{i_n}\right) = \sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_n\leqslant n} x_{i_1,1}\dots x_{i_n,n} f(\vec{e}_{i_1},\dots,\vec{e}_{i_n})$$

mais comme ici f est alternée, on peut indexer la somme par $1 \leqslant i_1,\dots,i_n \leqslant n$ deux à deux distincts, ce qui revient à prendre une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que pour tout j, $i_j = \sigma(j)$. On obtient alors

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n} f(\vec{e}_{\sigma(1)},\dots,\vec{e}_{\sigma(n)})$$

Comme f est aussi antisymétrique,

$$f(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) = \left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n}\right) f(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$$

On pose $d : \left| \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n} \end{array}\right.$

On a que pour tout $f \in \Lambda_n(E)$, $f = f(\mathscr{B})\cdot d$ et donc $\Lambda_n(E) \subset \operatorname{Vect} d$.

Montrons que $d \in \Lambda_n(E)$.

- La n-linéarité vient de la linéarité l'application qui à un vecteur x associe sa i^{e} coordonnées dans $\mathscr{B}$.
- Pour montrer qu'elle est alternée, on montre qu'elle est antisymétrique :

$$d(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_n) = -d(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_i,\dots,\vec{x}_j,\dots,\vec{x}_n)$$

  avec le changement d'indice $\sigma' = \sigma\circ(i\ j)$.

Donc $\Lambda_n(E) = \operatorname{Vect} d$.

Dernier point : $d \neq 0$: il suffit de vérifier que $d(\mathscr{B}) = 1$. ■

Remarque

R4 – Deux formes n-linéaires alternées sur E de dimension n (oui, c'est bien le même n les deux fois) sont donc toujours proportionnelles, c'est ce qui importe.

Plus précisément, une base $\mathscr{B}$ de E étant donnée, il existe une unique forme n-linéaire alternée envoyant $\mathscr{B}$ sur le scalaire 1. On va l'appeler déterminant dans la base $\mathscr{B}$, noté $\det_{\mathscr{B}}$, et toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$.

Voir exercice du TD : 11

3 Déterminant

a Définitions

On fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E.

Définition 7 : Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

On appelle **déterminant dans la base** $\mathscr{B}$ l'unique forme n-linéaire alternée sur E notée $\det_{\mathscr{B}}$ telle que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Si pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $\vec{x}_j \in E$ de coordonnées $(x_{1,j},\dots,x_{n,j})$ dans $\mathscr{B}$, alors

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n}$$

On note

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Remarque

R5 – Par définition, le déterminant est n-linéaire alterné. En particulier, le déterminant d'une famille liée est nul.

Propriété 7 : du déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases de E.

(*i*) ***Formule de changement de base*** : $\det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$.

(*ii*) $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$ *et* $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \left(\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\right)^{-1}$.

(*iii*) $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ *est libre/une base de E si et seulement si* $\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Démonstration

(i) $\det_{\mathscr{B}'} \in \Lambda_n(E)$.

(ii) On applique (i) à $\mathscr{B}$.

(iii) Un sens déjà vu. Pour l'autre, c'est le caractère alterné du déterminant. ■

Propriété 8 : Interprétation géométrique

(*i*) *Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

(*ii*) *Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.*

On montre que si $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$. On en déduit la définition :

Démonstration

Soit $f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \det_{\mathscr{B}}(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_n))$. Alors $f \in \Lambda_n(E)$ car u est linéaire et $\det_{\mathscr{B}}$ est n-linéaire alterné.
Donc $f = f(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) \det_{\mathscr{B}}$ et donc

$$\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = f(\mathscr{B}') = \det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}')) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \det_{\mathscr{B}'}(u(\mathscr{B}'))$$

et on conclut car $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$. ■

Définition 8 : Déterminant d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u le scalaire

$$\det u = \det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) = \det_{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$$

où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E.

Propriété 9 : du déterminant d'un endomorphisme

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

(*i*) $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E$,
$\det_{\mathscr{B}}(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_n)) = \det u \times \det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

(*ii*) $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.

(*iii*) $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.

(*iv*) ⚠ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, , $\det(\lambda u) = \lambda^{\boldsymbol{n}} \det u$.

(*v*) $u \in \mathscr{GL}(E) \Longleftrightarrow \det u \neq 0$.

(*vi*) $\det : (\mathscr{GL}(E), \circ) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(vii) *Si* $u \in \mathcal{GL}(E)$, $\det\left(u^{-1}\right) = (\det u)^{-1}$.

Démonstration

(i) f dans la preuve précédente.
(ii) $\det(\mathrm{id}_E) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.
(iii) découle de (i).
(iv) n-linéarité.
(v) $u \in \mathcal{GL}(E) \Longleftrightarrow u(\mathscr{B})$ base de $E \Longleftrightarrow \det u \neq 0$.
(vi) Conséquence de (iii).
(vii) Propriété de morphisme de groupes. ■

Remarque

R6 – ⚠ $\det$ n'est pas linéaire : $\det(u+v) \neq \det u + \det v$ en général.

Voir exercice du TD : 16

Définition 9 : du déterminant d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. On définit le **déterminant** de A par

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Remarque

R7 – Dans chaque terme de la somme, on choisit exactement un terme par colonne et par ligne.

R8 – Un définition alternative équivalente consisterait à faire agir la permutation sur le numéro de colonne : c'est l'égalité avec le déterminant de la transposée de la propriété suivante :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Propriété 10 : du déterminant d'une matrice carrée

(i) *Si* $C_1, \dots, C_n$ *sont les vecteurs colonnes de* A *et* $\mathscr{B}$ *la base canonique de* $\mathbb{K}^n$, $\det A = \det_{\mathscr{B}}(C_1, \dots, C_n)$.
(ii) *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n, $u \in \mathscr{L}(E)$ *représenté par* A *dans une base de* E, *alors* $\det A = \det u$.
(iii) $\det I_n = 1$.
(iv) *Si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det AB = \det A \det B$.
(v) ⚠ *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^{\boldsymbol{n}} \det A$.
(vi) $\det A^\top = \det A$.
(vii) $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$.
(viii) $\det : (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(ix) *Si A est inversible,* $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.

(x) *Des matrices semblables ont même déterminant : le déterminant est un invariant de similitude.*

Démonstration

(i) à (v) définitions puis conséquences des propriétés du déterminant d'un endomorphisme. (vi) :

$$\begin{aligned}\det\left(A^{\mathsf{T}}\right) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \\ &\underset{j=\sigma(i)}{=} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(i),i} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1),1} \dots a_{\sigma^{-1}(n),n} \\ &\underset{\sigma'=\sigma^{-1}}{=} \sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma'(1),1} \dots a_{\sigma'(n),n} = \det A.\end{aligned}$$

Le dernier changement d'indice étant licite car $\left|\begin{array}{ccc}\mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma^{-1}\end{array}\right.$ est bijective.

(viii) : par (iv).

(ix) : par morphisme de groupe ou $\det\left(A^{-1}\right) \times \det A = \det\left(A^{-1} \times A\right) = \det I_n = 1$.

(x) Deux matrices semblables représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes ou $\det\left(P^{-1}AP\right) = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$. ∎

Remarque

R9 – ⚠ $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général : det n'est pas linéaire.

b Calculs

Propriété 11 : Opérations sur un déterminant

(i) *Si une ligne ou une colonne est nulle, ou une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.*

(ii) *On ne change pas le déterminant avec les opérations*

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k\neq i} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_j \leftarrow C_j + \sum_{k\neq i} \lambda_k C_k$$

(*transvections successives.*)

(iii) *En multipliant par λ une ligne ou une colonne, on multiplie par λ le déterminant.*

(iv) *Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1. Plus généralement, si on permute les lignes ou les colonnes avec une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.*

(v) *Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses cœfficients diagonaux.*

Définition 10 : Mineurs, cofacteurs, comatrice

Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in [\![1, n]\!]$.

- On appelle **mineur** d'indice (i, j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu en retirant L_i et C_j à A.
- On appelle **cofacteur** d'indice (i, j) le nombre $C_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.
- On appelle **comatrice** de A la matrice de ses cofacteurs :

$$\tilde{A} = \operatorname{Com} A = (C_{i,j})_{i,j} = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\right)_{i,j}.$$

Propriété 12 : Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(*i*) ***Développement par rapport à*** L_i $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j}$.

(*ii*) ***Développement par rapport à*** C_j $\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j}$.

Exercice 3 : CCINP 63

Propriété 13 : Déterminant de matrice triangulaire par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, *alors*

$$\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Remarque

R 10 – ⚠ même lorsque toutes les matrices sont carrées, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$ ou autre $\det(AD - BC)$ en général !

Propriété 14 : Déterminant de Vandermonde

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} V(x_1,\dots,x_n) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i). \end{aligned}$$

Remarque

R 11 – $V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Démonstration

- **Première méthode** : Soit P le polynôme $P = V(x_1, \dots, x_{n-1}, X)$ (c'en est bien un !).
En développant par rapport à L_n (première expression), on a alors $P = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} D_{n,j} X^{j-1}$ où les $D_{n,j}$ ne contiennent pas X, donc $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. De plus, $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont racines de P.

  Donc on a $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P = \lambda(X - x_1) \cdots (X - x_{n-1})$ où λ est le cœfficient en X^{n-1} : c'est le mineur égal à $V(x_1, \dots, x_{n-1})$. Ainsi,
$$V(x_1, \dots, x_n) = V(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{1 \leqslant i < n} (x_n - x_i).$$
  On conclut alors par récurrence (facilement initialisée).
- **Deuxième méthode** : Avec $C_j \leftarrow C_j - x_n C_{j-1}$ en commençant par la dernière :
$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ 1 & x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_1 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$
  Donc, en développant par rapport à L_n et factorisant,
$$V(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n) V(x_1, \dots, x_{n-1})$$
  et on conclut par récurrence.

Voir exercice du TD : 9, 10, 12 à 14

C Formule de la comatrice

Propriété 15 : Formule de la comatrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors
$$A \times (\operatorname{Com} A)^\top = (\operatorname{Com} A)^\top \times A = \det(A) \cdot I_n.$$
Si, de plus, A est inversible, alors
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{Com} A)^\top.$$

Démonstration

Si $j, k \in [\![1, n]\!]$, $\left((\operatorname{Com} A)^\top \times A\right)_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} \left((\operatorname{Com} A)^\top\right)_{j,i} a_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,k}$.
Ainsi, si $k = j$, on reconnaît le développement par rapport à C_j du déterminant de A, donc les cœfficients diagonaux de $(\operatorname{Com} A)^\top \times A$ valent tous $\det A$.

Sinon, cela ressemble au développement d'une matrice A' dont toutes les colonnes sont celles de A sauf C_j qui a été remplacée par C_k.
On a alors $\det A' = 0$ par caractère alterné du déterminant.
Le développement par rapport à C'_j s'écrit $0 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta'_{i,j} a'_{i,j}$.
Or dans $\Delta'_{i,j}$, on a supprimé la colonne C'_j, donc les cœfficients correspondent exactement à ceux de A, donc $\Delta'_{i,j} = \Delta_{i,j}$.
De plus, pour tout k, $a'_{i,j} = a_{i,k}$.

Finalement, si $j \neq k$, $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,k} = 0$.
Ainsi, $(\text{Com}\, A)^{\top} \times A = \det(A) \cdot I_n$.
Pour l'autre relation, il suffit de raisonner sur les lignes plutôt que sur les colonnes. ■

Remarque

R 12 – Intérêt théorique. Utile en pratique seulement si $n = 2$ ou 3.

Voir exercice du TD : 17, 19

d Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Définition 11 : Avoir même orientation qu'une base

On dit qu'une base $\mathscr{B}$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel **a même orientation** qu'une autre base $\mathscr{B}'$ lorsque

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \det\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right) > 0.$$

Remarque

R 13 – ⚠ Cela n'a aucun sens dans $\mathbb{C}$!

Propriété 16 : Relation d'équivalence

C'est une relation d'équivalence avec exactement deux classes d'équivalences.

Définition 12 : Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Orienter un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est décider qu'une base est **directe**. Alors toutes les bases de même orientation sont dites directes.

Toutes les autres, qui ont même orientation entre elles, sont dites **indirectes**.

e Formules de Cramer (HP)

Propriété 17 : Formules de Cramer (HP)

Soit (S) un système de Cramer, c'est-à-dire à n équations et n inconnues et de matrice $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$. On sait que $(S) : Ax = b$ admet une unique solution $x = (x_1 \ \dots \ x_n)^{\top} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soient $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$x_i = \frac{\det\left(C_1 \middle| \cdots \middle| C_{i-1} \middle| b \middle| C_{i+1} \middle| \cdots \middle| C_n\right)}{\det A}.$$

Démonstration

$Ax = b \iff x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n = b.$

Donc $\det\left(C_1\middle|\cdots\middle|C_{i-1}\middle|b\middle|C_{i+1}\middle|\cdots\middle|C_n\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \det\left(C_1\middle|\cdots\middle|C_{i-1}\middle|C_j\middle|C_{i+1}\middle|\cdots\middle|C_n\right) = x_i \det A$ par caractère n-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes. ■

Remarque

R 14 – De nouveau, un intérêt surtout théorique !

Exercice 4

Résoudre $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{array}\right.$ **lorsqu'il s'agit d'un système de Cramer.**