Continuité des fonctions numériques

1. Exercices traités en cours

1 Montrer que la fonction $f:\left|\begin{array}{ccl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}\end{array}\right.$ est discontinue toute en vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires.

2 Montrer qu'un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

3 Étudier l'uniforme continuité des fonctions $x\mapsto ax+b$ (avec $a,b\in\mathbb{R}$), $|\cdot|$, $x\mapsto x^2$, $x\mapsto\frac{1}{x}$.

4 Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est $\frac{1}{2}$-hölderienne : c'est-à-dire qu'il existe $k\in\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x,y\in\mathbb{R}^+$, $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\leqslant k\sqrt{|x-y|}$.

En déduire l'uniforme continuité de $\sqrt{\cdot}$. Est-elle lipschitzienne ?

2. Continuité

5 Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues en 0 telles que $\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y)$.

6 Déterminer toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(xy)=f(x)f(y)$.

7 Un coureur parcourt 42 km en 4 heures. Montrer qu'il existe un intervalle de 2 heures pendant lequel il parcourt exactement 21 km.

L'exercice suivant permet de généraliser (ou non) ce type de raisonnement.

8 **Théorème de la corde universelle de Paul Lévy**

Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$.

1. En utilisant $f\left(\frac{k}{n}\right)$, montrer que pour tout $n\geqslant 2$, il existe $x_n\in[0,1]$ tel que $f(x_n)=f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$.
2. En considérant sur $[0,1]$, la fonction $f: x\mapsto\sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right)-x\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)$ où $T>0$, montrer qu'on peut avoir $f(0)=f(1)$ sans qu'il existe de x tel que $f(x)=f(x+T)$.

9 Soit $[a,b]$ un segment stable par f continue. Montrer que f admet un point fixe dans $[a,b]$.

3. Uniforme continuité

10 Étudier l'uniforme continuité sur $\mathbb{R}_*^+$ de $\ln$ et $x\mapsto x\ln x$.

11 Montrer qu'une fonction T-périodique continue sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

12 Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left|f(x)\right|\leqslant a|x|+b.$$

13 Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ continue telle que f admette une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.