

Suites et séries de fonctions, 1^{re} partie

1. Suites de fonctions

1 CCINP 9 : définition de la convergence uniforme

Solution de 1 : CCINP 9 : définition de la convergence uniforme

1. Soit $g_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{C}$.

Dire que (g_n) converge uniformément vers g sur X signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \forall x \in X, |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Ou encore, (g_n) converge uniformément vers g sur $X \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in X} |g_n(x) - g(x)| \right) = 0.$

2. (a) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x).$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = \frac{n+2}{n+1}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 1.$

Si $x \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$

En effet, $|f_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} e^{-nx^2} |\cos(\sqrt{n}x)|$ et $0 \leq e^{-nx^2} |\cos(\sqrt{n}x)| \leq e^{-nx^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

On en déduit que (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $]0, +\infty[$ et f non continue en 0 donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $]0, +\infty[.$

(c) Soit $a > 0.$

On a : $\forall x \in [a, +\infty[, |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \frac{n+2}{n+1} e^{-na^2}$ (majoration indépendante de x).

Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n+1} e^{-na^2} = 0$ (car $\frac{n+2}{n+1} e^{-na^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{-na^2}$).

Donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[.$

(d) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée sur $]0, +\infty[$ car pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{n+2}{n+1} \leq 2.$$

D'autre part, f est bornée sur $]0, +\infty[$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)|$ existe.

On a $|f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})| = \frac{(n+2)e^{-1} \cos 1}{n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})| = e^{-1} \cos 1 \neq 0.$

Or $\sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})|$, donc $\sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $]0, +\infty[.$

2 CCINP 11 : condition de non convergence uniforme

Solution de 2 : CCINP 11 : condition de non convergence uniforme

1. Par contraposée :

si (f_n) converge uniformément vers f alors :

il existe un entier N tel que $\forall n \geq N$, $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$ existe et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$.

C'est-à-dire la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$.

Si $x \neq 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ car $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 x^2}$.

Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R} .

(b) Soit $a > 0$.

$\forall x \in [a, +\infty[$, $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + n^2 a^2}$.

Cette majoration est indépendante de x et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + n^2 a^2} = 0$.

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$.

On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{\pi}{2n}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]0, +\infty[$ et $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4}}$ qui ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

On en déduit, d'après 1., que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

3 CCINP 12 : Convergence uniforme et continuité

Solution de 3 : CCINP 12 : Convergence uniforme et continuité

1. Soit $x_0 \in [a, b]$.

Prouvons que f est continue en x_0 .

Soit $\varepsilon > 0$.

Par convergence uniforme, il existe un entier N tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \implies (\forall x \in [a, b], |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon)$.

En particulier pour $n = N$, on a $\forall x \in [a, b], |f(x) - f_N(x)| \leq \varepsilon$. (*)

Or la fonction f_N est continue en x_0 donc $\exists \alpha > 0$ tel que :

$\forall x \in [a, b], |x - x_0| \leq \alpha \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \varepsilon$. (**)

D'après l'inégalité triangulaire, $\forall x \in [a, b], |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$.

Alors d'après (*) et (**),

$$\forall x \in [a, b], |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq 3\varepsilon.$$

On en déduit que f est continue en x_0 .

2. La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue en 1 alors que g est discontinue en 1.

D'après la question précédente, on en déduit que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers g sur $[0, 1]$.

4

Ex CCINP 13 : convergence uniforme et fonctions bornées

1. Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans \mathbb{C} , X désignant un ensemble non vide quelconque. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g .
Démontrer que la fonction g est bornée.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} .

La convergence est-elle uniforme sur \mathbb{R} ?

Solution de 4 : Ex CCINP 13 : convergence uniforme et fonctions bornées

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée sur X , c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M_n \in \mathbb{R}^+, \forall x \in X, |g_n(x)| \leq M_n. \quad (*)$$

Notons que ce majorant M_n dépend de n .

(g_n) converge uniformément vers g sur X . Ce qui signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Prenons $\varepsilon = 1$ et fixons un entier N vérifiant (1) pour ce choix de ε .

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |g_n(x) - g(x)| \leq 1$.

En particulier, $\forall x \in X, |g_N(x) - g(x)| \leq 1$. (**)

Or, d'après l'inégalité triangulaire, $\forall x \in X, |g(x)| \leq |g(x) - g_N(x)| + |g_N(x)|$.

Donc, d'après (*) et (**), $\forall x \in X, |g(x)| \leq 1 + M_N$.

Ce qui signifie que g est bornée sur X .

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc, } \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que, } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} < |x|.$$

Fixons un tel entier N .

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies f_n(x) = \frac{1}{x}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$.

On en déduit que (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est bornée car $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq n^2$.

Or f n'est pas bornée sur \mathbb{R} donc, d'après la question précédente, (f_n) ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

5 Étudier la convergence des suites de fonctions

1. $f_n : x \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sqrt{n} \cos^n x \sin x$.

4. $i_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

2. $g_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2nx^2}{1+n^2x^4}$.

3. $h_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

5. $j_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin\left(\frac{n+1}{n}x\right)$.

6 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} définie par $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = x^p(1+n^\alpha e^{-nx})$.

1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers une fonction f que l'on précisera.

2. Démontrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $p > \alpha$.

7 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continue sur \mathbb{R} . Étudier la convergence de la suite de fonctions

$$f_n : x \mapsto \sqrt{f(x)^2 + \frac{1}{n}}.$$

Solution de 7 :

Quantité conjuguée.

8 Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f , (g_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g .

Vérifier que $(f_n + g_n)$ converge uniformément vers $f + g$.

Donner une condition suffisante simple portant sur h pour que la suite de fonction (hf_n) converge uniformément vers hf .

9 Montrer que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur ce segment.

10 Théorème de Weierstraß par les polynômes de Bernstein

Soit f continue sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. On définit les fonctions polynômes de Bernstein associées à f , pour tout $n \in \mathbb{N}$, définie sur $[0, 1]$, par $B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$.

1. Calculer $B_n(u)$ où $u : x \mapsto 1$.
2. Que vaut, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{k}{n} \binom{n}{k}$? En déduire $B_n(\text{id})$.
3. Calculer de même $B_n(v)$ où $v : x \mapsto x^2$.
4. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Justifier l'existence d'un réel M tel que pour tout x dans $[0, 1]$, $|f(x)| \leq M$.

(b) Justifier l'existence de $\eta > 0$ tel si $x, x' \in [0, 1]$, $|x - x'| \leq \eta \implies |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $x \in [0, 1]$, on note $A_x = \left\{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \eta \right\}$ et B_x le complémentaire de A_x dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

(c) Montrer que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \sum_{k \in A_x} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in B_x} \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \frac{(k-nx)^2}{n^2 \eta^2} x^k (1-x)^{n-k}.$$

(d) En déduire que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\eta^2}$.

5. Conclure.

11 Preuve du théorème de la double limite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à \mathbb{K}^I , $a \in \bar{I}$. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_n$.

1. Montrer que si $a \in I$, on a bien $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$ en appliquant un théorème de continuité.
2. Montrer qu'il existe un rang N tel que si $n \geq N$, il existe un voisinage de a (qui dépend de n) sur lequel $|b_n| \leq 2 + |f(x)|$.
3. Montrer que f est bornée au voisinage de a .
4. En déduire que (b_n) est bornée et qu'elle a une valeur d'adhérence b .
Soit φ une extractrice telle que $b_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Proposer une majoration de $|b_n - b|$ faisant intervenir $b_n, b_{\varphi(n)}, b, f_n(x), f_{\varphi(n)}(x), f(x)$ où $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$ et en déduire qu'il y a un rang à partir duquel $|b_n - b| \leq \varepsilon$.
6. En déduire que $b_n \rightarrow b$ et conclure à l'aide de prolongements par continuité.

Solution de 11 : Preuve du théorème de la double limite

Si $a \in I$, on est ramené au théorème de continuité.

Sinon, l'idée est de prolonger par continuité les f_n en a en posant $f_n(a) = b_n$ pour voir appliquer le théorème précédent. Pour cela, on va commencer par montrer que (b_n) converge. On commence par montrer qu'elle est bornée pour appliquer le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Soit V un voisinage de a sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément.

Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I \cap V$, $|b_n| \leq |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$.

On a un rang N à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$.

On suppose dorénavant que $n \geq N$.

On a aussi un voisinage W_n de a sur lequel $|b_n - f_n(x)| \leq 1$.

En prenant $x_n \in I \cap V \cap W_n$, on tire $|b_n| \leq 2 + |f(x_n)|$.

Mais comme les f_n convergent en a , elle sont bornées au voisinage de a donc par convergence uniforme, f est aussi bornée (disons, par M) au voisinage de a .

On obtient donc, pour $n \geq N$, $|b_n| \leq 2 + M$ et donc (b_n) est bornée.

Par théorème de Bolzano-Weierstraß, on en extrait une suite convergente : $b_{\varphi(n)} \rightarrow b$.

On montre alors que $b_n \rightarrow b$.

Or pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$|b_n - b| \leq |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| + |f_{\varphi(n)}(x) - b_{\varphi(n)}| + |b_{\varphi(n)} - b|.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

On a un voisinage V' de a sur lequel, à partir d'un rang N , $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$. Comme $\varphi(n) \geq n$, on a alors aussi $|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$.

Puis des voisinages W'_n et W''_n de a sur lesquels $|b_n - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ et $|b_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n)}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ respectivement.

Puis un rang N' à partir duquel $|b_{\varphi(n)} - b| \leq \frac{\varepsilon}{5}$.

Finalement, en prenant $n \geq \max(N, N')$ et $x \in I \cap V' \cap W'_n \cap W''_n$, alors tire $|b_n - b| \leq \varepsilon$.

Ainsi, $b_n \rightarrow b$.

On prolonge les f_n par continuité en a en posant $f_n(a) = b_n$, et on pose $f(a) = b$. Les f_n ainsi prolongées sont continues en a et convergent uniformément vers f (pas de problème en a car $b_n \rightarrow b$), qui est aussi continue en a , donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$.

12 Que peut-on dire d'un polynôme borné sur \mathbb{R} ?

Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est limite uniforme de polynômes, alors f est un polynôme.

2. Séries de fonctions

A. Exercices vus en cours

13 Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto e^{-\sqrt{n}x}$

14 Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$

15 Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que $\sum n^\alpha x e^{-n^2x}$ converge normalement sur \mathbb{R}^+ . Dans le cas contraire, préciser sur quels types d'intervalles il y a convergence normale.

16 Étudier la convergence normale de $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

17 A-t-on convergence normale de $\sum f_n$ où $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto xe^{-n^2x^2}$?

18 Soit $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Montrer que la somme f de la série est continue sur \mathbb{R}_+^* .
3. Montrer qu'il n'y a pas de convergence normale sur \mathbb{R}_+^* .
4. Calculer la limite en $+\infty$ de f .

19 Soit $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ et calculer de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que la série converge normalement sur tout segment de \mathbb{R}_+^* .
3. Montrer que la conclusion du théorème de la double-limite ne tient pas en 0^+ .

20 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ puis déterminer $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

21 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .
On note f la somme de la série.
2. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer f' .
3. Étudier les variations de f .

B. Exercices CCINP

22 CCINP 8 : Séries alternées

Solution de 22 : CCINP 8 : Séries alternées

1. (a) $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$, donc $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 De même $S_{2n+3} - S_{2n+1} \geq 0$, donc $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 De plus $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) = 0$.
 On en déduit que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Donc elles convergent et ce vers une même limite.
 Comme $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ recouvrent l'ensemble des termes de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on en déduit que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite.
 Ce qui signifie que la série $\sum (-1)^k u_k$ converge.

(b) Le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq u_{n+1}$.

2. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = (-1)^n u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = +\infty$, donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x \geq 0$, alors $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$.

Donc d'après 1.(a), $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

Remarque : pour $x > 0$, on a aussi convergence absolue de $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$.

En effet, pour tout réel $x > 0$, $n^2 |f_n(x)| = n e^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $|f_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(b) Comme $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, on peut poser $\forall x \in [0, +\infty[, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Alors, comme, $\forall x \in [0, +\infty[, (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$, on en déduit, d'après 1.(b), que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, |R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}.$$

Et donc $\forall x \in [0, +\infty[, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$.

C'est-à-dire $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

23

CCINP 15 : Convergences normale et uniforme

Solution de 23 : CCINP 15 : Convergences normale et uniforme

1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est bornée sur X .

On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty = \sup_{t \in X} |f_n(t)|$.

$\sum f_n$ converge normalement sur $X \iff \sum \|f_n\|_\infty$ converge.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n f_k$.

$\sum_{X} f_n$ converge uniformément sur $X \iff$ la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur X .

2. On suppose que $\sum f_n$ converge normalement sur X .

Les fonctions f_n sont donc bornées sur X et la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Or, $\forall x \in X, |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$.

Donc, par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente et donc convergente, puisque les fonctions f_n sont à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur X .

On peut donc poser $\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, N \geq n+1 \implies \left| \sum_{k=n+1}^N f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^N |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^N \|f_k\|_\infty$.

Alors, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$\forall x \in X, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. (majoration indépendante de x)

Or $\sum f_n$ converge normalement sur X donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty = 0$.

On en déduit alors que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0 sur X .

Comme $R_n = S - S_n$, la suite (S_n) converge uniformément vers S sur X .

C'est-à-dire $\sum f_n$ converge uniformément sur X .

3. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{n^2}{n!}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n^2}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

On en déduit que série entière $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

Cette série entière converge donc normalement sur tout compact de \mathbb{C} .

En particulier, cette série entière converge normalement et donc uniformément, d'après 2., sur tout disque de centre O et de rayon R .

24 CCINP 17 : CN de la série de fonction \implies CU du TG vers 0

Solution de 24 : CCINP 17 : CN de la série de fonction \implies CU du TG vers 0

1. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur A .

On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur A .

On pose alors, $\forall x \in A$, $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$.

$\sum f_n$ converge uniformément sur A , c'est-à-dire (S_n) converge uniformément vers S sur A , c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n - S\|_\infty = 0$, avec $\|S_n - S\|_\infty = \sup_{x \in A} |S_n(x) - S(x)|$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in A$, $|f_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \leq |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)|$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in A$, $|f_n(x)| \leq \|S_n - S\|_\infty + \|S_{n-1} - S\|_\infty$ (majoration indépendante de x).

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n - S\|_\infty = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|S_n - S\|_\infty + \|S_{n-1} - S\|_\infty) = 0$.

Donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur A .

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0; +\infty[$, $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

Soit $x \in [0; +\infty[$.

Si $x = 0$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc $\sum f_n(0)$ converge.

Si $x \neq 0$:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 f_n(x) = 0$, donc au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument donc, par critère de domination, $\sum f_n(x)$ converge absolument.

On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, donc f_n est bornée sur $[0; +\infty[$.

Comme f_0 est bornée ($f_0 = 0$), on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée.

De plus, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

En effet, si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = e^{-1}$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = |f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)| \leq \sup_{t \in [0; +\infty[} |f_n(t)|$; donc $\sup_{t \in [0; +\infty[} |f_n(t)| \geq e^{-1}$.

Ainsi, $\sup_{t \in [0; +\infty[} |f_n(t)| \not\rightarrow 0$.

On en déduit que (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0; +\infty[$.

Donc, d'après 1., $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0; +\infty[$.

25

CCINP 18 : Convergence et continuité d'une série de fonctions

Solution de 25 : CCINP 18 : Convergence et continuité d'une série de fonctions

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence $R = 1$.

En $x = 1$, il y a convergence par le critère spécial des séries alternées.

En $x = -1$, la série diverge (série harmonique).

On a donc $D =]-1, 1]$.

2. (a) $\forall x \in D$, $u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in]-1, 1]} |u_n(x)| = \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ ne converge pas normalement sur D .

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ ne converge pas uniformément sur D non plus car, sinon, on pourrait employer le théorème de la double limite en -1 et cela entraînerait la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, ce qui est absurde.

(b) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, S est continue sur $] -1, 1[$. (*)

Pour étudier la continuité en 1, on peut se placer sur $[0, 1]$.

$\forall x \in [0, 1]$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées ce qui permet de majorer son reste.

On a, $\forall x \in [0, 1]$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)

Et, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Donc, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Les fonctions u_n étant continues sur $[0, 1]$, la somme S est alors continue sur $[0, 1]$.

Donc, en particulier, S est continue en 1. (**)

Donc, d'après (*) et (**), S est continue sur D .

26 CCINP 53 : Étude d'une série de fonctions

Solution de 26 : CCINP 53 : Étude d'une série de fonctions

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ et donc $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$ converge.

Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4 x^3}$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente donc, par critère d'équivalence pour

les séries à termes de signe constant, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Conclusion : $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.

• Prouvons que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

$\forall x \in [a, b]$, $|f_n(x)| \leq \frac{b}{n^4 a^4}$ (majoration indépendante de x).

De plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

• Prouvons que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

$$\forall x \in [a, +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{x}{n^4 x^4} = \frac{1}{n^4 x^3} \leq \frac{1}{n^4 a^3} \quad (\text{majoration indépendante de } x).$$

De plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

(c) On remarque que f_n est continue sur le compact $[0, 1]$, donc f_n est bornée sur $[0, 1]$.

De plus, d'après 1.(b), $\forall x \in [1, +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^4}$, donc f_n est bornée sur $[1, +\infty[$.

On en déduit que f_n est bornée sur $[0, +\infty[$ et que $\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)|$ existe.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

Autre méthode :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f'_n(x) = \frac{1 - 3n^4 x^4}{(1 + n^4 x^4)^2}.$$

On en déduit que f_n est croissante sur $]0, \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}, +\infty[$.

f_n étant positive sur \mathbb{R} , on en déduit que f_n est bornée.

$$\text{Donc } \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| \text{ existe et } \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}\right) = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4n}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est continue sur $]0, +\infty[$. (1)

$\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$. (2)

Donc, d'après (1) et (2), f est continue sur $]0, +\infty[$.

Comme f est impaire, on en déduit que f est également continue sur $]-\infty, 0[$.

Conclusion : f est continue sur \mathbb{R}^* .

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ car, au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{n^4 x^3}$.

D'après 1.(b), $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$.

Donc, d'après le cours, f admet une limite finie en $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

C. Autres exercices

27**Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet¹**

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

1. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\zeta(x)$?
2. Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ?
3. Étudier les variations de ζ .
4. Calculer la limite en $+\infty$.
5. Calculer la limite en 1. Le théorème de la double-limite s'applique-t-il ? Que peut-on en déduire ?
6. Donner un équivalent en 1 en comparant à une intégrale.
7. Tracé le graphe de ζ .
8. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\eta(x)$? Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ? uniforme ?
9. Montrer que si $x > 1$, $\eta(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$. Retrouver l'équivalent de ζ en 1.

Solution de 27 : Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet²

1. $]1, +\infty[$
2. $[a, +\infty[$ où $a > 1$.
3. $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{\ln^k(n)}{n^x}$. CN sur tout $[a, +\infty[$. D'où la classe \mathcal{C}^∞ et $\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln^k(n)}{n^x}$.
4. ζ est décroissante.
5. 1 par double limite.
6. 1re solution : comparer à une intégrale, cf question suivante.
2e solution : on a envie de comparer ζ près de 1 à la série harmonique.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme ζ st décroissante, elle a une limite finie ou $+\infty$ en 1.
Or on a $\ell \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
Donc $\ell = +\infty$.
ou encore $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq A$ à partir d'un rang N .
Pour $n = N$, on a V voisinage de 1 tel que sur V , $\zeta(x) \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^x} \geq A$.
7. $\frac{1}{x-1}$.
8. CS sur \mathbb{R}_*^+ par TSSA.
CN sur $[a, +\infty[$, $a > 1$.
CU sur $[a, +\infty[$, $a > 0$ par majoration du reste TSSA.
Pas de CU au voisinage de 0 car $\frac{1}{n^{1/n}} \not\rightarrow 0$.

1. Incontournable : presque du cours.

9. Simplifier $\phi(x) + \zeta(x)$ en passant par les sommes partielles.

28 Continuité et limites de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4 + n^2 x^2}$.

Solution de 28 :

Il y a convergence normale sur \mathbb{R} , donc uniforme, les fonctions $x \mapsto 1/(n^4 + n^2 x^2)$ sont continues, donc f l'est (sur \mathbb{R} tout entier).

29 Démontrer que $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$ définit une fonction continue sur \mathbb{R} .

Solution de 29 :

Il y a convergence normale sur \mathbb{R} , donc uniforme, les fonctions $x \mapsto \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$ sont continues, donc f l'est (sur \mathbb{R} tout entier).

30 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions

$$f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-n^2 x}.$$

Déterminer sa limite en $+\infty$, ainsi qu'un développement asymptotique de la somme à la précision e^{-2x} au voisinage de $+\infty$.

Indication : On pourra sortir quelques termes de la somme et vérifier que le reste est négligeable.

Solution de 30 :

La convergence simple se règle facilement, en disant par exemple que pour n'importe quel $x > 0$,

$$\exp(-n^2 x) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

(par croissances comparées). On majore facilement $|f_n|$ par 1 sur \mathbb{R}_+^* , et c'est le plus petit majorant possible, car $\lim_0 f_n = 1$. Il n'y a donc pas convergence normale, vu que $\|f_n\|_\infty = 1$. Il y a en revanche convergence normale sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$ (car $\|f_n|_{[a, +\infty[}\|_\infty = \exp(-n^2 a)$). Il n'y a pas non plus convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $]0, +\infty[$, sinon la suite (f_n) convergerait uniformément vers $\tilde{0}$, ce qui n'est pas le cas.

La convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, où l'on a fixé un $a > 0$ arbitraire, permet néanmoins d'utiliser le théorème de la double limite, et de trouver, en notant $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, que $\lim_{+\infty} S = 1$.

Pour un développement asymptotique, la stratégie est souvent d'utiliser des comparaisons série-intégrale après avoir éventuellement mis de côté certains termes. Ici, une majoration simple permet d'éviter le recours un peu plus long à la comparaison série-intégrale : pour tout $x > 0$, $S(x) = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + R(x)$ où

$$0 \leq R(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-k^2 x} \leq \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{e^{-3x}}{1 - e^{-x}}$$

ce qui donne facilement

$$S(x) = 1 + e^{-x} + \underset{x \rightarrow +\infty}{o} (e^{-2x})$$

31 Étudier la convergence sur \mathbb{R}^+ de la série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(x \mapsto (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n+1} \right) \right)$. Sa somme est-elle continue ?

Solution de 31 :

La convergence simple est conséquence du théorème spécial sur les séries alternées. Puis la majoration du reste dans ce même théorème permet d'écrire pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, +\infty[$, avec des notations habituelles,

$$|R_n(x)| \leq \ln \left(1 + \frac{x}{n+2} \right)$$

Ce qui permet facilement d'avoir la convergence uniforme sur tout segment.

Les fonctions $x \mapsto (-1)^n \ln \left(1 + \frac{x}{n+1} \right)$ étant continues, la somme l'est.

32 Oral des Mines

On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2}$.

1. Domaine de définition de f .
2. Parité de f .
3. Continuité de f .
4. Limite en $+\infty$
5. La convergence est-elle uniforme ?

Solution de 32 : Oral des Mines

1. La convergence simple se traite en distinguant le cas $t = 0$. Mais sans difficulté. f est définie sur \mathbb{R} .

2. f est impaire.

3. Dérivons $f_n : t \mapsto \frac{2t}{t^2 + n^2}$. La dérivée a le signe de $2(t^2 + n^2) - 2t(2t) = 2(n^2 - t^2)$ et on en déduit que $|f_n|$ est maximale en $-n$ et en n . On trouve alors qu'il n'y a pas convergence normale. En revanche, il y a convergence normale, donc uniforme, sur tout segment, ce qui suffit (en n'oubliant pas de dire que les f_n sont continues) pour établir la continuité de f .

En effet, soit K un segment. Soit $M > 0$ tel que $K \subset [-M, M]$. L'étude des variations de f_n sur $[-M, M]$ montre que, si $n \geq M$, donc au moins à partir d'un certain rang,

$$\|f_n|_K\|_\infty \leq f_n(M) = \frac{2M}{M^2 + n^2}$$

Or $\sum_n f_n(M)$ converge, donc $\sum_n \|f_n|_K\|_\infty$ converge.

4. Une comparaison à une intégrale donne la limite : π .

5. Et donc la convergence n'est pas uniforme, car le théorème de la double limite donnerait une limite nulle.

33

1. Pour quelles valeurs du réel x la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + n^2 x^2}$ converge-t-elle ?
2. Démontrer la continuité de la somme sur son domaine de définition.

3. Donner un équivalent de sa somme au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Solution de 33 :

Plan de résolution : il y a convergence sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, uniforme car normale sur tout segment inclus dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ce qui assure la transmission de la continuité.

On pourrait montrer que la limite en $+\infty$ est nulle par double limite, la limite en 0 est $+\infty$ par technique habituelle (la fonction décroît, si elle n'a pas pour limite $+\infty$ en 0 elle est majorée, on en déduit que les sommes partielles sont uniformément majorées, on peut dans une somme partielle faire tendre la variable vers 0, on en déduit que $\sum 1/n$ converge. Tout cela ne nous donne pas d'équivalent!

L'idée à avoir, dans ce genre de question (équivalent), c'est la comparaison à une intégrale. Ici, notant $S(x)$ la somme de la série de fonctions au point x , on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2x^2} \leq S(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2x^2}$$

où on a noté $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2x^2}$ la limite pour $A \rightarrow +\infty$ de $\int_1^A \frac{dt}{t+t^2x^2}$.

Le calcul de l'intégrale se fait : on décompose en éléments simples

$$\frac{1}{t+t^2x^2} = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}$$

Pour ne pas couper une intégrale qui existe en deux intégrales qui n'existent pas, on passe par

$$\int_1^A \frac{dt}{t+t^2x^2} = \int_1^A \frac{dt}{t} - \int_1^A \frac{x^2}{1+tx^2} dt$$

On intègre avec des \ln , on prend les limites quand $A \rightarrow +\infty$, et finalement on aboutit à

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \leq S(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

En $+\infty$, c'est raté, on ne peut qu'espérer qu'il y a un équivalent du type a/x^2 , avec $1 \leq a \leq 2$. Mais en revanche, en 0, l'encadrement permet de conclure :

$$S(x) \sim_{x \rightarrow 0} -2 \ln x$$

Alors au voisinage de $+\infty$, que fait-on ? on observe, et on se dit que n ne pèse pas lourd devant n^2x^2 . Donc, notant $b = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on espère que

$$S(x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{b}{x^2}$$

Pour cela, on écrit

$$S(x) - \frac{b}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(1+nx^2)}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(1+nx^2)}$ converge normalement sur $[0, +\infty[$, on peut lui appliquer le théorème de la double limite en $+\infty$, on obtient

$$S(x) - \frac{b}{x^2} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

d'où l'équivalent. Hors-programme : $b = \pi^2/6$, et on a bien $1 \leq b \leq 2$, c'est agréable.

34

Pour tout réel $x \notin \mathbb{Z}^-$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ et $g(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Déterminer leurs limites en $+\infty$.
3. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$ et montrer que g vérifie cette même relation.
4. En déduire que $f = g$.

Solution de 34 :

1. Pour f , on peut utiliser le critère de d'Alembert pour l'absolue convergence :

$$\left| \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} \right| = \frac{1}{|x+n+1|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ converge absolument donc converge pour tout $x \notin \mathbb{Z}^-$.

Pour g , on est tenté d'utiliser le TSSA. C'est possible car $\left(\frac{1}{n!(x+n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir du rang $\max(0, [-x])$ (pour avoir $x+n > 0$), et, bien sûr, $\frac{1}{n!(x+n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. On vérifie que f converge normalement sur $[1, +\infty[$: si $x \geq 0$, $\left| \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par double limite, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Pour g , on a pour $x \in [1, +\infty[$, $\left| \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \right| = \frac{1}{n!(x+n)} \leq \frac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente donc convergence normale donc uniforme sur $[1, +\infty[$ (on aurait aussi pu utiliser la majoration du reste dans le TSSA). Par double limite, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

3. On calcule

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)} \\ &= x \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+m)} = x \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) = x f(x) - 1. \end{aligned}$$

Puis,

$$x g(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+n-n)}{n!(x+n)} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n!} - \frac{n(-1)^n}{n!(x+n)} \right) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{n!(x+n)}$$

(licite car les deux séries convergent bien). Le terme pour $n = 0$ est nul dans la deuxième (attention, pas de factorielle de nombre < 0) et on reconnaît une série exponentielle dans la première. Donc

$$x g(x) = e \cdot e^{-1} - e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} = 1 + e \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!(x+1+m)} = 1 + g(x+1).$$

4. On obtient alors pour tout x , $f(x) - g(x) = \frac{f(x+1) - g(x+1)}{x}$ puis par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) - g(x) = \frac{f(x+n) - g(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

avec $f(t) - g(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (c'est la convergence simple de f).

35 Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{e^{-2nx} + e^{3nx}}$ est définie et continue sur \mathbb{R} .

36 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \text{Arctan}(x+n) - \text{Arctan}(n)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

2. Montrer que $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Solution de 36 :

1. Utiliser le théorème des accroissements finis. CN sur tout segment.

2. Se ramener au voisinage de 0 et utiliser la série divergente $\sum \text{Arctan} \frac{1}{n}$.