Révisions et compléments d'algèbre linéaire

1. Espaces vectoriels

1 Montrer que l'ensemble des suites réelles p-périodique où $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2 Étudier l'indépendance linéaire de $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(x \mapsto |x-a|)_{a\in\mathbb{R}}$, $(x \mapsto \mathrm{e}^{nx})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x \mapsto \cos(ax))_{a\in\mathbb{R}}$.

Solution de 2 :
Pour la première et la troisième, passer par des polynômes, pour la deuxième, utiliser une propriété de dérivabilité.

3 $E = \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$, $F = \{f \in E \text{ constante}\}$, $G = \{f \in E \text{ nulle sur } [-1,0]\}$ et $H = \{f \in E \text{ nulle sur } [0,1]\}$. Montrer que F, G, H sont supplémentaires dans E.

Solution de 3 :
$F = \mathrm{Vect}\, 1$, G et H sev par caractérisation.

Puis anaylse-synthèse : si, avec des notations évidentes, $\phi = f + g + h$, alors en intégrant, $f : x \mapsto \phi(0)$, $g(x) = \phi(x) - \phi(0)$ si $x > 0$ et 0 sinon, $h(x) = \phi(x) - \phi(0)$ si $x < 0$ et 0 sinon. La synthèse ne pose pas de problème.

2. Dimension finie

4 **CCINP 55 : Suites récurrentes d'ordre 2**

5 Montrer que $E = \left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\right\}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Solution de 5 :
$E = \mathrm{Vect}\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ famille Q-libre (...) donc $\dim E = 3$.

6 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G$ possède au moins un vecteur non nul.

Solution de 6 :
Utiliser la formule de Grassmann.

7 Soit $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$ tel que le $\mathbb{L}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ soit de dimension finie $\dim_{\mathbb{L}} \mathbb{K} = p$, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim_{\mathbb{K}} E = n$.

Montrer que E est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim_{\mathbb{L}} E = pn = \dim_{\mathbb{L}} \mathbb{K} \dim_{\mathbb{K}} E$.

Solution de 7 :
Soit $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $\mathscr{D} = (k_1, \dots, k_p)$ une base du $\mathbb{L}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.

Soit enfin $\mathscr{B} = (k_i e_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ famille de np vecteurs de E.

Alors tout vecteur x de E est une combinaison linéaire des e_j dont les coefficients, dans $\mathbb{K}$, sont eux-même combinaisons linéaire des k_i à coefficients dans $\mathbb{L}$: $x = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_{i,j}k_i\right)e_j = \sum_{i,j}\lambda_{i,j}k_ie_j$. Ainsi, les vecteurs de E sont tous combinaison linéaire des k_ie_j et $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{L}}(k_ie_j)_{i,j}$ est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel.

De plus, si $\sum_{i,j}\lambda_{i,j}k_ie_j = 0_E$ où les $\lambda_{i,j}$ sont des scalaires de $\mathbb{L}$, alors $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_{i,j}k_i\right)e_j = 0_E$. Comme $\mathscr{C}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, pour tout j entre 1 et n, $\sum_{i=1}^{p}\lambda_{i,j}k_i = 0_{\mathbb{K}}$ et comme $\mathscr{D}$ est une base de $\mathbb{K}$, pour tout i entre 1 et p, $\lambda_{i,j} = 0$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est libre.

Finalement, $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base du } \mathbb{L}\text{-espace vectoriel } E \text{ qui est de dimension } np.}$