Révisions et compléments d'algèbre linéaire

- Savoir démontrer que des sous-espaces sont supplémentaires est essentiel, et la raisonnement usuel est celui de l'analyse-synthèse pour y parvenir en dimension quelconque, ou, pour deux sous-espaces, dimension + intersection en dimension finie.
- Ne pas hésiter à dessiner en dimension 2 ou 3 pour voir ce qui se passe (notamment pour les projecteurs ou les symétries).
- Attention, pour plus deux sous-espaces, la somme est directe n'équivaut pas à l'intersection des tous les sev est réduite à 0.
- Le fait qu'un sous-espace de même dimension (finie) de E est E tout entier est souvent très utile.
- Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension, être bijectif, injectif ou surjectif, c'est pareil. Pratique, non ? Et pour l'injectivité, on calcule le noyau !
- Le théorème du rang est un résultat extrêmement important. Il faut en connaître parfaitement l'énoncé COMPLET (ne pas se contenter de la formule). Attention : il ne dit pas que l'image et le noyau sont supplémentaires !
- Un argument souvent utilisé en algèbre linéaire : pour montrer que deux expressions linéaires sont égales, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur une base.

1. Espaces vectoriels

1 Montrer que l'ensemble des suites réelles p-périodique où $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2 Étudier l'indépendance linéaire de $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(x \mapsto |x-a|)_{a\in\mathbb{R}}$, $(x \mapsto \mathrm{e}^{nx})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x \mapsto \cos(ax))_{a\in\mathbb{R}}$.

3 $E = \mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$, $F = \{f \in E \text{ constante}\}$, $G = \{f \in E \text{ nulle sur } [-1,0]\}$ et $H = \{f \in E \text{ nulle sur } [0,1]\}$. Montrer que F, G, H sont supplémentaires dans E.

2. Dimension finie

4 **CCINP 55 : Suites récurrentes d'ordre 2**

5 Montrer que $E = \left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\right\}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

6 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G$ possède au moins un vecteur non nul.

7 Soit $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$ tel que le $\mathbb{L}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$ soit de dimension finie $\dim_{\mathbb{L}} \mathbb{K} = p$, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim_{\mathbb{K}} E = n$.

Montrer que E est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel de dimension finie $\dim_{\mathbb{L}} E = pn = \dim_{\mathbb{L}} \mathbb{K} \dim_{\mathbb{K}} E$.

3. Applications linéaires

8 **CCINP 62 : Endomorphisme connu par un polynôme annulateur** Sauf 2.b

9 **CCINP 64 : CNS pour que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ soient supplémentaires**

10 **CCINP 93 : utilisation d'une équation dans $\mathscr{L}(E)$** Seulement 1.

11 **CCINP 60 : étude d'un endomorphisme matriciel**

12 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 - 4u + 3\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que u est automorphisme, déterminer u^{-1} puis montrer que $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - 3\,\mathrm{id}_E) = E$. Quelle transformation u représente-t-elle ?

13 Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer

1. $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v \circ u) = u^{-1}(\operatorname{Ker} v)$ et $v(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.
2. $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \operatorname{Ker} u \iff \operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u = \left\{\vec{0}_F\right\}$.
3. $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v \iff \operatorname{Ker} v + \operatorname{Im} u = F$.

14 Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

15 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Démontrer que u est une homothétie.

Application : déterminer, en dimension finie, le centre de $\mathscr{GL}(E)$.

Si x non nul, on pourra s'intéresser à $D = \operatorname{Vect} x$ et introduire une symétrie.

Retrouver le résultats en raisonnant matriciellement.

16 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p, q deux projecteurs. Démontrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

17 Soient p, q deux projecteurs sur un espace vectoriel E tel que $p \circ q = 0$. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur sur $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

18 **Images et noyaux itérés**

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $F_n = \operatorname{Im} u^n$ et $G_n = \operatorname{Ker} u^n$ forment des suites de sous-espaces respectivement décroissante et croissante (pour l'inclusion). Montrer qu'elles sont stationnaires à partir d'un même rang p si E est de dimension finie, et que F_p et G_p sont supplémentaires.

19 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que

$$\left|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v\right| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.$$

20 Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$. Montrer que

$$\operatorname{rg} v \circ u \geqslant \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v - \dim F.$$

21 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg} u = 1$. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.

22 Soient E un espace vectoriel de dimension finie de $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que sont équivalentes

1. $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$ **2.** $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ **3.** $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$

23 Soient E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que

$$E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v.$$

Montrer que ces sommes sont directes.

24 Montrer qu'une forme linéaire est soit nulle soit surjective.

25 Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi : M \mapsto \operatorname{tr}(AM)$.

2. On suppose que pour tout $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(MN) = \varphi(NM)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \operatorname{tr}$.

4. Calcul matriciel

- Il faut bien sûr savoir multiplier entre elles des matrices, mais aussi bien connaître la formule donnant les cœfficients d'un produit de matrice (penser à une relation *type Chasles*.)
- Pour calculer les puissances d'une matrice carrée, on peut :
  - soit conjecturer le résultat puis le prouver par récurrence,
  - soit l'écrire comme somme de deux matrices simples qui commutent et utiliser la formule du binôme,
  - soit trouver un polynôme qui annule la matrice et effectuer la division euclidienne de X^n par ce polynôme,
  - ou encore la diagonaliser si c'est possible pour calculer simplement ces puissances (voir chapitre sur la réduction).
- Il faut savoir employer la méthode du pivot de Gauss pour calculer le rang (opération sur lignes ou colonnes ou les deux).
- Pour inverser une matrice :
  - Il faut savoir employer la méthode du pivot de Gauss (là, il faut choisir : soit les lignes, soit les colonnes).
  - Il est souvent commode de résoudre le système linéaire $Y = AX$ pour obtenir $X = A^{-1}Y$.
  - Si on connaît un polynôme annulateur de A, il faut savoir en déduire, si elle existe, l'inverse de A.
- Lorsque l'on cherche les matrices vérifiant une relation vraie pour toute matrice M, il est souvent judicieux d'essayer $M = E_{i,j}$.
- Bien savoir écrire une matrice d'une application linéaire, bien sûr, mais aussi bien connaître les formules de changement de base, dans le bon sens.
- Une combinaison linéaire nulle des colonnes donne un élément du noyau d'une matrice et son image est engendrée par ses vecteurs colonnes.
- Des matrices équivalentes sont des matrices de même rang, c'est facile.
  Pour les matrices semblables c'est moins simple. On peut s'intéresser aux invariants de similitude (comme la trace ou le déterminant) ou voir si les matrices représentent un même endomorphisme...

26 Calculer les puissances entières (préciser si les expressions sont valables dans $\mathbb{Z}$) de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ par le binôme ou en déterminant un polynôme annulateur de A. Donner l'expression, plus généralement, de $P(A)$ pour tout polynôme P.

Retrouver le résultat en considérant $Q^{-1}MQ$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

27 Montrer que, si $a \in \mathbb{K}$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -a \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

28 Soit $A = (1 - \delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. En calculant A^2, montrer que A est inversible et calculer son inverse.

29 Déterminer le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad AM = MA.$$

30 Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, deux à deux distincts, et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec D.

31 Que dire de $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \ \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$?

32 Déterminer les matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

33 Montrer que pour toute matrice carrée A, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant tel que $P(A) = 0$. En déduire que si A est inversible, A^{-1} est un polynôme en A. Que peut-on dire de l'inverse d'une matrice inversible dans une sous-algèbre $\mathscr{B}$ de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$?

34 **Matrices à diagonale strictement dominante**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout i entre 1 et n, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

En calculant $\operatorname{Ker} A$, montrer que A est inversible.

35 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer l'image et le noyau de A.

36 Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter deux matrices carrées inversibles U et V telles que $UAV = J_{3,4,r}$ où $r = \operatorname{rg} A$.

37 Quel est le rang de $A = (\sin(i+j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$?

38 Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer qu'il existe deux matrices colonnes $U, V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $H = UV^\intercal$ et qu'alors $\operatorname{tr} H = V^\intercal U$.

39 On considère les quatre matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est-elle semblable à B ? à C ? à D ?

40 Soit $A = \begin{pmatrix} 18 & 14 & 34 \\ -5 & -3 & -10 \\ -6 & -5 & -11 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B sont semblables, puis expliciter $P \in \mathscr{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

5. Matrices d'applications linéaires

41 **CCINP 71 : étude d'une projection**

42 Reconnaître et étudier les endomorphismes canoniquement associés aux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 \\ 16 & -5 & -4 \\ 8 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

43 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E pour laquelle : $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$.

44 Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & 5 & -2 \\ -1 & -10 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 21 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

45 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

46 En utilisant les matrices J_r, montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

Retrouver ce résultat en utilisant l'interprétation géométrique des matrices par blocs.

47 **CCINP 59 : Morphisme de polynômes** Sauf 3.