ÉCOLE NAVALE

Concours 1992

Deuxième composition de mathématiques

Durée : 3 heures

I.

1. − ***a.*** Montrer que si (u_n) est une suite strictement positive telle que la série de terme général u_n diverge, et si la suite (v_n) converge vers l, alors la suite $w_n = \dfrac{\sum\limits_{p=0}^{n} u_p v_p}{\sum\limits_{p=0}^{n} u_p}$ converge vers l.

b. La convergence de w_n entraîne-t-elle celle de v_n ?

2. − Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\prod\limits_{p=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\right]^{1/n}$.

3. − ***a.*** Montrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites strictement positives équivalentes telles que les séries de termes généraux u_n et v_n divergent alors les sommes partielles $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p$ et $S'_n = \sum\limits_{p=0}^{n} v_p$ sont des suites équivalentes.

b. En déduire que un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

4. − Montrer plus précisément que $\gamma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$ tend vers une limite γ que l'on ne cherchera pas à calculer.
Préciser le sens de variation de γ_n et l'encadrer par deux entiers consécutifs, calculer γ_{100} et γ_{1000}.
Écrire un programme en Pascal permettant le calcul de γ_n.

5. − ***a.*** Montrer que si u_n est le terme général d'une série positive et que pour $n\geq 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + v_n$ où v_n est le terme général d'une série absolument convergente, alors :
$\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = -\dfrac{\lambda}{n} + w_n$ où w_n est le terme général d'une série absolument convergente.

b. En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que u_n est équivalent à $\dfrac{A}{n^\lambda}$.

c. Étudier la série de terme général $u_n = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)(2n+2)}$.

6. − ***a.*** On dit que la série de terme général u_n converge au sens de Cesaro si la suite $\sigma_n = \dfrac{S_0+S_1+S_2+\ldots+S_n}{n+1}$ converge, où $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
Prouver que si la série converge, elle converge au sens de Cesaro.

b. On suppose que la série de terme général u_n converge au sens de Cesaro et que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$. Montrer que la série est convergente.

II.

1. – Soit la suite récurrente définie par u_0 et $(\forall n \in \mathbb{N})\, u_{n+1} = u_n + u_n^2$.
Étudier sa convergence suivant les valeurs de u_0 et préciser sa limite.

2. – ***a.*** On suppose que la suite converge mais n'est pas stationnaire et on pose $v_n = -u_n$; quelle relation de récurrence vérifie v_n ? Montrer que v_n est équivalent à v_{n+1}.

b. On pose $a_n = \dfrac{1}{v_n} - \dfrac{1}{v_{n-1}}$, montrer que (a_n) converge et en déduire un équivalent de v_n.

c. Quelle est la nature des séries de termes généraux v_n, $\sin\left(v_n^2\right)$ et $\dfrac{v_n}{\sqrt{n}}$?

d. Soit $b_n = a_n - 1$. Montrer que b_n tend vers zéro et en trouver un équivalent.

e. En déduire la nature de la série $t_n = v_n - \dfrac{1}{n}$.

3. – Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) tend-elle vers l'infini ?
Montrer qu'alors u_n^2 est équivalent à u_{n+1}.
Prouver que la suite $P_n = \dfrac{\ln u_n}{2^n}$ a une limite λ que l'on ne cherchera pas à calculer.

4. – On suppose jusqu'à la fin de la partie II u_0 strictement positif. La limite λ est fonction de u_0 seulement.
Montrer que c'est une fonction croissante de u_0, que $\lambda > 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda - \dfrac{\ln u_n}{2^n} < \dfrac{1}{2^n u_n}$.

5. – Quelle est la nature des séries de termes généraux $\dfrac{1}{u_n}$ et $\dfrac{(-1)^n n}{u_n}$?

III

1. – Étudier la suite récurrente définie par u_0 et $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}} - 1$.

2. – Étudier les séries de termes généraux u_n^2 et u_n.