Corrigé du Devoir en Temps Limité nº 2

Problème 1 : Autour de la transformation d'Abel (CNM TSI 2002, CCINP MP 2014)

I. Transformation d'Abel

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\boxed{b_k = B_k - B_{k-1}.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule avec la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k$$

   donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k.}$

2. On suppose la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, donc $|(a_n - a_{n+1})B_n| = \mathcal{O}(|a_n - a_{n+1}|)$.

   La série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ étant convergente par hypothèse, les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs assurent la convergence de la série $\sum |(a_n - a_{n+1})B_n|$, c'est-à-dire l'absolue convergence, et donc la convergence, de la série $\sum (a_n - a_{n+1})B_n$. Comme, de plus, $a_n B_n \to 0$ car $a_n \to 0$ et (B_n) bornée, la relation démontrée en **1.b** montre que $\boxed{\text{la série de terme général } a_n b_n \text{ converge.}}$

3. Supposons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Alors, par télescopage,

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k - a_{k+1}| = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_0,$$

   c'est-à-dire que la série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ converge.
   Les hypothèses de la question précédente sont donc vérifiées, donc

$$\boxed{\text{la série de terme général } a_n b_n \text{ converge.}}$$

4. Supposons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Si l'on pose $b_n = (-1)^n$ pour tout n, alors $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = 0$ ou 1 selon la parité de n, donc la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. D'après la question précédente, la série $\sum a_n b_n$ converge.
   On a donc démontré le *critère spécial sur les séries alternées* :

   $\boxed{\text{Si la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante de limite nulle, la série } \sum (-1)^n a_n \text{ est convergente.}}$

   (Notez que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle implique $a_n \geqslant 0$ pour tout n !)

5. (a) On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Notons que, par hypothèse, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$.

Par théorème, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}}\frac{(-2\mathrm{i})\sin(n\theta/2)}{(-2\mathrm{i})\sin(\theta/2)}$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta/2}\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.}$

(b)
- Lorsque $\alpha > 1$, la série de terme général $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n^{\alpha}}$ est absolument convergente donc $\boxed{\text{convergente.}}$
- Lorsque $\alpha \leqslant 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc

$$\boxed{\text{la série est grossièrement divergente.}}$$

- Soit $\alpha \in]0,1]$. On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question **3**.
  Notons tout de même que le fait que la série commence à $n=1$ à la place de $n=0$ n'a pas d'incidence.
  La suite $(1/n)$ est décroissante et tend vers 0.
  D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right| \leqslant \dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ donc la suite des sommes partielles de $\sum \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ est bornée. Donc $\boxed{\text{la série est (semi-)convergente.}}$

- Bilan : $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n^{\alpha}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0.}$

II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

1. Si x est un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$, alors, d'après la question 5.a, $C_n(x)+\mathrm{i}S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, d'où en séparant partie réelle et imaginaire,

$$\boxed{C_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{-x}{2}\right)+\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

et

$$\boxed{S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.}$$

---

2. On a donc, pour $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ fixé, $|S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$, c'est-à-dire que la suite $\left(S_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Comme en **I.5.b** qu'on peut aussi utiliser directement en prenant la partie imaginaire avec $\alpha = 1$, en appliquant alors le résultat de la question **I.3.** avec $a_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ (la valeur de a_0 importe peu) et $b_n = \sin nx$, on obtient que la série trigonométrique

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin nx}{n} \text{ converge lorsque } x \notin 2\pi\mathbb{Z}. \text{ Et puisqu'elle converge aussi lorsque } x \in 2\pi\mathbb{Z}}$$

($\sin nx = 0$ pour tout n), on peut donc définir $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

3. Posons pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \geqslant 1$, $f_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n}$.
Alors f_N est impaire donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_N(-x) = -f_N(x)$ et par unicité de la limite, $f(-x) = -f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est impaire.}}$

   On montre de la même façon que, puisque les f_N sont 2π-périodiques, $\boxed{\text{il en est de même de } f.}$

4. Pour $x \in]0,\pi[$ on a, en utilisant un résultat de la question **II.1**, et puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ est continue sur $]0,\pi[$

$$\int_x^\pi \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = \int_x^\pi \frac{\mathrm{d}t}{2} + \int_x^\pi C_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi - x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \int_x^\pi \cos kt\,\mathrm{d}t$$

   donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2}\int_x^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.}$

5. (a) Une intégration par parties (les fonctions considérées étant toutes de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x,\pi]$ pour $x \in]0,\pi[$) donne

$$\int_x^\pi \underbrace{h(t)}_{u(t)} \underbrace{\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{n+\frac{1}{2}} \cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right)h(t)\right]_x^\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_x^\pi h'(t)\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)h(x) + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_x^\pi h'(t)\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t,$$

   On en déduit, en remarquant que h' est continue sur le segment $[x,\pi]$ donc bornée par une constante M sur ce segment,

$$\left|\int_x^\pi h(t)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{2n+1}\left(\underbrace{\left|\cos\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x\right)\right|}_{\leqslant 1}|h(x)| + \left|\int_x^\pi \underbrace{|h'(t)|}_{\leqslant M}\underbrace{\left|\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right|}_{\leqslant 1}\,\mathrm{d}t\right|\right)$$

$$\leqslant \frac{2}{2n+1}\left(|h(x)| + |\pi - x| M\right),$$

   ce qui implique que $\boxed{\displaystyle\int_x^\pi h(t)\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

   Remarque : nous venons de redémontrer, dans un cas particulier, le fameux lemme de Borel-Lebesgue.

   (b) On déduit alors de la question précédente et de la question **II.4**, pour tout $x \in]0,\pi[$,

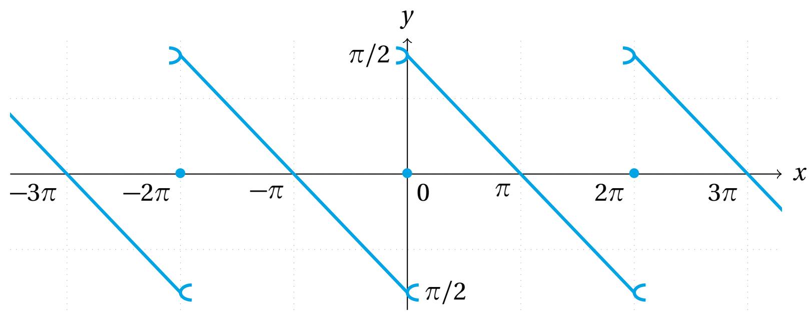
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi - x}{2},$$

   donc, par unicité de la limite, $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ et cette égalité est encore vraie pour $x = \pi$.
   Si x appartient à $]\pi, 2\pi[$ on a $x - 2\pi \in]-\pi, 0[$ et $2\pi - x \in]0,\pi[$, donc, h étant 2π-périodique et impaire,

$$f(x) = f(x - 2\pi) = -f(2\pi - x) = -\frac{\pi - (2\pi - x)}{2} = \frac{\pi - x}{2},$$

donc pour tout $x \in]0,2\pi[$, $\boxed{f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}}$.

(c)



III. Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

6. (a)

$$\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin px}{p}=\sum_{p=m+1}^{n}\frac{S_p(x)-S_{p-1}(x)}{p}=\sum_{p=m+1}^{n}\frac{S_p(x)}{p}-\sum_{p=m+1}^{n}\frac{S_{p-1}(x)}{p}$$
$$=\sum_{p=m+1}^{n}\frac{S_p(x)}{p}-\sum_{p=m}^{n-1}\frac{S_p(x)}{p+1}=\left[\frac{S_n(x)}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}\frac{S_p(x)}{p}\right]-\left[\sum_{p=m+1}^{n-1}\frac{S_p(x)}{p+1}+\frac{S_m(x)}{m+1}\right]$$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin px}{p}=\frac{S_n(x)}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}S_p(x)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)-\frac{S_m(x)}{m+1}.}$

(b) On remarque déjà que, pour $x\in]0,2\pi[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|S_n(x)|=\left|\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}=\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On déduit alors de la relation précédente et de l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin px}{p}\right|\leqslant\left|\frac{S_n(x)}{n}\right|+\sum_{p=m+1}^{n-1}|S_p(x)|\left|\underbrace{\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}}_{\geqslant 0}\right|+\left|\frac{S_m(x)}{m+1}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\frac{1}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)+\frac{1}{m+1}\right)$$
$$\leqslant\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{m+1}\right)=\frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, puisque la série converge (cf. **II.2**), on obtient :

$$\boxed{\left|\sum_{p=m+1}^{+\infty}\frac{\sin px}{p}\right|\leqslant\frac{2}{(m+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.}$$

7. (a) Par définition de $k=\left\lfloor\dfrac{\pi}{x}\right\rfloor$ on a $kx\leqslant\pi$ donc pour tout $p\in[\![1,k]\!]$, $\sin(px)\geqslant 0$.
D'autre part, on sait que pour tout $X\geqslant 0$ on a $\sin X\leqslant X$ donc pour tout $p\in[\![1,k]\!]$, $\sin(px)\leqslant px$.
Ainsi, $\boxed{0\leqslant\displaystyle\sum_{p=1}^{k}\frac{\sin px}{p}\leqslant\pi.}$

(b) Inégalité classique : comme $\sin$ est concave sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ($\sin''=-\sin\leqslant 0$) et $y=\dfrac{2}{\pi}x$ est l'équation de la corde reliant les points d'abscisse 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, $\boxed{\sin x\geqslant\dfrac{2}{\pi}x \text{ sur } \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right].}$

(c) D'après l'inégalité obtenue en **III.6.b** et le résultat précédent (puisque $\dfrac{x}{2}\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$), on a :

$$\left|\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\sin px}{p}\right|\leqslant\frac{2}{(k+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\leqslant\frac{2}{(k+1)\frac{2}{\pi}\frac{x}{2}}=\frac{2\pi}{(k+1)x}<2$$

puisque par définition de la partie entière on a $k\leqslant\dfrac{\pi}{x}<k+1$. Donc $\boxed{\left|\displaystyle\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\sin px}{p}\right|\leqslant 2.}$

8. En combinant les résultats des deux questions précédentes on a

$$\forall x\in]0,\pi],\ \left|\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin px}{p}\right|\leqslant\left|\sum_{p=1}^{k}\frac{\sin px}{p}\right|+\left|\sum_{p=k}^{n}\frac{\sin px}{p}\right|\leqslant 2+\pi,$$

puis, par π-périodicité de la fonction $x\mapsto\left|\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin px}{p}\right|$, $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \left|\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin px}{p}\right|\leqslant 2+\pi.}$

Problème 2 (ESTP 1975, Navale 1992)

A. Convergence au sens de Cesáro

1. Question de cours. Voir le cours, donc.

2. Comme $v_n\to\ell$, $v_n-\ell=o(1)$ puis $u_nv_n-\ell u_n=o(u_n)$ et u_n est un terme général strictement positif de série divergente, donc avec la question précédente, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(u_pv_p-\ell u_p)=\sum_{p=0}^{n}u_pv_p-\ell\sum_{p=0}^{n}u_p=o\left(\sum_{p=0}^{n}u_p\right)$ donc $w_n-\ell=o(1)$ et $\boxed{w_n\to\ell.}$

3. En prenant $v=((-1)^n)_n$ et $u=(1)_n$, on obtient $w_n\to 0$ (car $w_{2n}=\dfrac{1}{2n+1}$ et $w_{2n+1}=0$) et pourtant v n'a pas de limite. $\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$

4. Comme tout est strictement positif, on passe par le logarithme

$$\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right)}\right)=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}(\ln(p+1)-\ln p)=\frac{\ln(n+1)-0}{n}$$

par télescopage.

Par croissances comparées, on a $\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right)}\right)\to 0$, donc par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{\sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p}\right)}\to 1.}$$

5. On a $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$ avec v_n terme général strictement positif de série divergente donc d'après la première question, $S_n - S'_n = \mathrm{o}(S'_n)$ c'est-à-dire $\boxed{S_n \sim S'_n.}$

6. On remarque que $\frac{1}{n} \sim \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ termes généraux strictement positifs de séries divergentes, donc d'après la question précédente puis par télescopage,

$$H_n \sim \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln n + \mathrm{o}(\ln n)$$

donc $\boxed{H_n \sim \ln n.}$

7. On montre que la série télescopique de terme général $u_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln n)$ converge.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Or $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ est un terme général de série télescopique convergente, et $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est un terme général de série **absolument** convergente par comparaison de séries à terme généraux positif, donc terme général de série convergente.

Finalement, $\sum u_n$ converge, donc par télescopage, $\boxed{\text{on a } \gamma \in \mathbb{R} \text{ tel que } u_n - \ln n \to \gamma.}$

8. (a) Il s'agit la très classique règle de Raabe-Duhamel, vue en TD.
Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{\lambda}{n} = \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{\lambda}{n} = -\frac{\lambda}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $-\frac{\lambda}{n} + v_n \to 0$. Par comparaison de séries à termes positifs et critère de Riemann, $\boxed{\sum |w_n| \text{ converge.}}$

(b) On s'intéresse à la série télescopique de terme général

$$\ln\left((n+1)^{\lambda}u_{n+1}\right) - \ln\left(n^{\lambda}u_n\right) = \lambda\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\ln\frac{u_{n+1}}{u_n} + \frac{\lambda}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

qui est un terme général de série convergente comme somme de deux termes généraux de séries absolument convergentes donc convergentes, en utilisant la question précédente.

On a donc $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ln\left(n^{\lambda}u_n\right) \to \ell$, puis en posant $A = \mathrm{e}^{\ell} > 0$, $n^{\lambda}u_n \to A$ puis $\boxed{u_n \sim \frac{A}{n^{\lambda}}.}$

(c) On pourrait simplifier l'écriture de u_n et utiliser la formule de Stirling, mais ce n'est pas la logique de l'énoncé.
On remarque que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1 - \frac{3}{2n}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{3}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est un terme général de série absolument convergente, on se retrouve dans la situation de la question (a) et d'après la question précédente, on a $A>0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^{3/2}}$.
Par comparaison des séries à termes positifs et par critère de Riemann $(3/2>1)$,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

9. (a) Par application de la question 2 avec $u=(1)_n$, on a bien que

$$\boxed{\text{Si la série de terme général } u_n \text{ est convergente, alors elle converge au sens de Cesàro.}}$$

(b) On calcule, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k} u_\ell = \frac{1}{n+1}\sum_{0\leqslant \ell\leqslant k\leqslant n} u_\ell = \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n}(n-\ell+1)u_\ell = S_n - \frac{\sum_{\ell=0}^{n}\ell u_\ell}{n+1}$$

Donc $S_n = \sigma_n + \frac{\sum_{\ell=0}^{n}\ell u_\ell}{n+1}$ avec $(\sigma_n)_n$ convergence par convergence au sens de Cesàro de $\sum u_n$ et par application de la question 2 comme $n u_n \to 0$. Ainsi $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

B. Autour d'une suite récurrente

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc (u_n) est croissante. Une étude rapide de $f : x \mapsto x+x^2$ (parabole de sommet $(-1/2,-1/4)$ passant par $(-1,0)$ et $(0,0)$) permet de voir que $]-1,0[$ est stable par f donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n<0$ donc (u_n) est majorée par 0 et donc $\boxed{\text{elle converge.}}$

   Par continuité, la limite vérifie $\ell = \ell+\ell^2$ donc $\boxed{u_n \to 0.}$

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} = v_n - v_n^2.}$

3. Comme $v_n = -u_n \to 0$, $v_n^2 = \mathrm{o}(v_n)$ donc avec la question précédente, $\boxed{v_n \sim v_{n+1}.}$

4. On calcule $a_n = \frac{v_{n-1}-v_n}{v_{n-1}v_n} = \frac{v_{n-1}^2}{v_{n-1}v_n} = \frac{v_{n-1}}{v_n} \sim 1$ d'après la question précédente.

   Donc $\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n-1}} \sim 1 > 0$. Par sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence (voir problème 2... ou le cours !), $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{v_k}-\frac{1}{v_{k-1}}\right) = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} \sim \sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

   Or $v_n \to 0$ donc $\frac{1}{v_0} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{v_n}\right)$ donc $\frac{1}{v_n} \sim n$ et $\boxed{v_n \sim \frac{1}{n}.}$

5. Par critère de Riemann et comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

Puis comme $v_n \to 0$, $\sin v_n^2 \sim v_n^2 \sim \frac{1}{n^2}$, donc par critère de Riemann $(2 > 1)$ et comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum \sin v_n^2 \text{ converge.}}$

Et $\frac{v_n}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ donc par critère de Riemann $(3/2 > 1)$ et comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum \frac{v_n}{\sqrt{n}} \text{ converge.}}$

---

6. $\boxed{b_n = a_n - 1 \to 0}$ d'après la question 4 puis $b_n = \frac{v_{n-1} - v_n}{v_n} = \frac{v_{n-1}^2}{v_n} \sim v_n$ donc $\boxed{b_n \sim \frac{1}{n}}$ d'après les questions 3 et 4.

---

7. Par sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence, comme $a_n - 1 \sim \frac{1}{n}$ (question précédente, on obtient $\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} - n \sim H_n \sim \ln n$ (voir problème précédent).
Donc $\frac{1}{v_n} - n = \ln n + \frac{1}{v_0} + \mathrm{o}(\ln n) = \ln n + \mathrm{o}(\ln n) \sim \ln n$.
Or $\frac{1}{v_n} - n = \frac{n}{v_n}\left(\frac{1}{n} - v_n\right) \sim -t_n$ donc $t_n \sim -\frac{\ln n}{n}$.
Or pour tout $n \geqslant 3$, $\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$ donc par comparaison des séries à termes positifs et divergence de la série harmonique, $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge puis par comparaison de séries à termes négatifs, $\boxed{\sum t_n \text{ diverge.}}$

Fin