

Devoir en Temps Limité n° 2

À lire attentivement

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des questions (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est conseillé d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Aucun départ avant la fin des 4 heures n'est autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.
- Donnez tout, croyez-y, vous êtes aux concours et vous voulez décrocher l'école de vos rêves!



Les deux problèmes sont totalement indépendants. L'exercice est indépendant, mais le deuxième problème pourra être une source d'inspiration.
Les traiter sur des copies séparées.

Problème 1 : Autour de la transformation d'Abel

I. Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes. On s'intéresse ici à la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$.

Pour tout entier naturel n , on pose $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer b_k à l'aide deux termes de la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

On parle de **transformation d'Abel**.

- On suppose que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ converge.
- Établir que si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et si la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$ converge.
- Énoncez et démontrez en utilisant une transformation d'Abel un critère garantissant la convergence d'une série alternée.
- Exemple : dans cette question θ est un réel différent de $2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$. On donnera une forme simplifiée dans laquelle il ne reste plus qu'une exponentielle, en facteur.
 - Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

Pour tout réel x et tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin(kx) \quad \text{et} \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx).$$

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $C_n(x) + iS_n(x)$ et en déduire que

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}}.$$

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans la suite, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ pour $x \in \mathbb{R}$, et on cherche à calculer la valeur de cette somme de série.

3. Vérifier soigneusement que f est impaire et 2π -périodique.

4. Soit $x \in]0, \pi[$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2} \int_x^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin \frac{t}{2}} dt$.

5. Soit $x \in]0, \pi[$. Pour tout $t \in [x, \pi]$, on pose $h(t) = \frac{1}{\sin \frac{t}{2}}$.

(a) En procédant à une intégration par partie, et en majorant la valeur absolue, montrer que $\int_x^\pi h(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(b) Montrer que pour tout $x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

(c) Tracer le graphe de f sur \mathbb{R} .

III. Une majoration uniforme des sommes partielles de la série précédente

On conserve les notations de la partie précédente. On note, pour tout $n \geq 1$, $R_n(x)$ le reste d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6. Soit $x \in]0, 2\pi[$.

(a) Montrer, en utilisant une transformation d'Abel, que pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$

$$\text{tel que } 1 \leq m < n, \text{ on a } \sum_{p=m+1}^n \frac{\sin(px)}{p} = \frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} S_p(x) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) - \frac{S_m(x)}{m+1}.$$

(b) En déduire que $|R_m(x)| \leq \frac{2}{(m+1)\sin \frac{x}{2}}$.

7. Soit $x \in]0, \pi[$. On note $k = \left[\frac{\pi}{x} \right]$ la partie entière de $\frac{\pi}{x}$.

(a) Montrer que $0 \leq \sum_{p=1}^k \frac{\sin px}{p} \leq \pi$.

(b) Montrer que si $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$.

(c) Soit $n \geq k+1$. Montrer que $\left| \sum_{p=k+1}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq 2$.

8. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$, une majoration uniforme (indépendante à la fois de x et de n) de la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Problème 2

A. Convergence au sens de Cesàro

1. Soit u et v deux suites à termes réels strictement positifs tel que $u_n = o(v_n)$. On note S_n et S'_n les sommes partielles des séries de terme général u_n et v_n respectivement. Montrer que si la série $\sum v_n$ diverge, alors $S_n = o(S'_n)$.

2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $\sum u_n$

$$\text{diverge et } v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}. \text{ Montrer que } w_n = \frac{\sum_{p=0}^n u_p v_p}{\sum_{p=0}^n u_p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Indication : on pourra chercher à écrire que $\left(\sum_{p=0}^n u_p \right) (w_n - \ell)$ sous forme d'un $o(\dots)$,

ou bien revenir à la définition de la limite.

3. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que la convergence de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'entraîne pas celle de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. En reprenant les notations et en utilisant la question 1, montrer que si les séries u et v à termes strictement positifs vérifient $u_n \sim v_n$ et sont termes généraux de séries divergentes, alors $S_n \sim S'_n$.

5. En déduire que $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Indication : chercher un équivalent de $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

6. Montrer plus précisément que $H_n - \ln n$ tend vers une limite γ lorsque $n \rightarrow +\infty$. (On ne cherchera pas à calculer γ .)

7. (a) Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors on a $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ terme général de série absolument convergente tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{\lambda}{n} + w_n.$$

(b) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \frac{A}{n^\lambda}$.

(c) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+2)}$.

8. (a) On dit que la série de terme général u_n converge au sens de Cesàro si la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$ et $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Dire rapidement pourquoi, si la série de terme général u_n est convergente, alors elle converge au sens de Cesàro.

(b) Soit la série de terme général u_n . On suppose que cette série converge au sens de Cesàro et que $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

B. Autour d'une suite récurrente

On considère la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ et $u_0 \in]-1, 0[$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.

2. On pose $v_n = -u_n$. Quelle est la relation de récurrence vérifiée par v_n ?

3. Montrer que $v_n \sim v_{n+1}$.

4. On pose $a_n = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n-1}}$. Trouver un équivalent de a_n et en déduire un équivalent de v_n .

5. Quelle est la nature de la série de terme général v_n ? Celle de la série de terme général $\sin v_n^2$? Celle de la série de terme général $\frac{v_n}{\sqrt{n}}$?

6. On pose $b_n = a_n - 1$. Montrer que $b_n \rightarrow 0$ et trouver un équivalent de b_n .

7. En déduire la nature de la série de terme général $t_n = v_n - \frac{1}{n}$.

On pourra utiliser librement l'équivalent usuel de la somme partielle de la série harmonique : $H_n \sim \ln n$.

FIN DE L'ÉNONCÉ