Devoir Libre n° 4* : idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Notations et définitions

n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients réels.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On rappelle que deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice P carrée inversible d'ordre p et une matrice Q carrée inversible d'ordre n telles que $B = PAQ$.

A étant un élément de $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, on appelle noyau de A, noté $\mathrm{Ker}(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\right\}.$$

On appelle image de A le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{R})$, noté $\mathrm{Im}(A)$:

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{AX, X \in \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})\right\}.$$

Un sous-groupe J de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est appelé un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall M \in J, MA \in J.$$

Un sous-groupe J de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est appelé un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall M \in J, AM \in J.$$

Si J est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite, on dit que J est un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On désigne par I la matrice identité d'ordre n.

A. Résultats préliminaires

Soit A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose A de rang r.

1. Soit u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- **a)** Soit $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ une base du noyau de u, montrer l'existence d'une famille de vecteurs $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ telle que $(e_1, e_2, \dots, e_r, e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.
- **b)** Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$.
  En déduire que le sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(u)$.
  En déduire que $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.
- **c)** Peut-on compléter la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ en une base de $\mathbb{R}^n$?
  En déduire que A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où I_r désigne la matrice identité d'ordre r et 0 une matrice nulle de taille convenable.

2. Soit D une matrice diagonale d'ordre n telle que r éléments de la diagonale sont égaux à 1, les $n-r$ autres sont nuls. Montrer que A est équivalente à D.

B. Application

On considère une application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, différente des constantes 0 et 1, telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, f(AB) = f(A)f(B).$$

1. Montrer que pour toute matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A)$ est non nul.

2. A est une matrice de rang r, strictement inférieur à n.

- **a)** Montrer l'existence de $r+1$ matrices, notées $A_1, A_2, \dots, A_{r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que le produit $A_1 A_2 \dots A_{r+1}$ soit nul.
- **b)** En déduire que $f(A) = 0$.

3. Que peut-on en conclure pour l'application f ?
Donner un exemple d'une telle application.

C. Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit J un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $I \in J$, alors $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si J contient une matrice inversible alors $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. On suppose que J n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit A une matrice de rang r (non nul) appartenant à J.

- **a)** Montrer que J contient la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- **b)** Montrer l'existence de $n-r+1$ matrices, notées $A_1, A_2, \dots, A_{n-r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que la somme $A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r+1}$ soit une matrice inversible.

4. Quelle conclusion peut-on en tirer pour les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

D. Idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$.
On désigne par J_E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$J_E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid E \text{ contient } \mathrm{Im}(A)\}$$

Montrer que J_E est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit A un élément de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{(n,q)}(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{Im}(B)$ est contenue dans $\mathrm{Im}(A)$. On veut montrer qu'il existe une matrice C appartenant à $\mathcal{M}_{(p,q)}(\mathbb{R})$ telle que $B = AC$.
On fixe un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(A)$ dans $\mathcal{M}_{(p,1)}(\mathbb{R})$.

- **a)** Justifier que l'application ϕ définie par $X \mapsto AX$ définit un isomorphisme de S dans $\mathrm{Im}(A)$.
- **b)** Soit $(e_1, e_2, \dots, e_q)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{(q,1)}(\mathbb{R})$.
  Justifier l'existence, pour tout i compris entre 1 et q, d'un unique élément ε_i de S tel que

$$A\varepsilon_i = Be_i.$$

c) Soit C l'élément de $\mathscr{M}_{(p,q)}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les matrices $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$. On pose $C = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \ldots \quad \varepsilon_q]$. Montrer que $B = AC$.

3. Soient A, B et C trois éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\mathrm{Im}(A)+\mathrm{Im}(B)$ contient $\mathrm{Im}(C)$.

a) On désigne par $D = (A, B)$ la matrice de $\mathscr{M}_{(n,2n)}(\mathbb{R})$ obtenue en juxtaposant les matrices A et B, c'est-à-dire que les n premières colonnes de D sont celles de A et les n dernières celles de B.

Montrer que $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(A)+\mathrm{Im}(B)$.

b) En déduire l'existence d'une matrice W appartenant à $\mathscr{M}_{(2n,n)}(\mathbb{R})$ telle que : $C = DW$.

c) En déduire l'existence de deux matrices U et V appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = AU + BV$.

4. Soit J un idéal à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel r tel que :

$\forall M \in J, \mathrm{rang}(M) \leqslant r$ et qu'il existe $M_0 \in J$ tel que $\mathrm{rang}(M_0) = r$.

b) Soit M un élément quelconque de J. On suppose que $\mathrm{Im}(M)$ n'est pas contenue dans $\mathrm{Im}(M_0)$.

En utilisant le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $\mathrm{Im}(M)+\mathrm{Im}(M_0)$, montrer l'existence d'un élément de J de rang strictement supérieur à r.

c) Déduire des questions précédentes que J est contenu dans $J_{\mathrm{Im}(M_0)}$.

5. Montrer que $J = J_{\mathrm{Im}\, M_0}$.

E. Idéaux à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$. On désigne par J_E le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$J_E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Ker}(M) \text{ contient } E\}$$

Montrer que J_E est un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. a) On désigne par u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, v une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$.

On suppose que $\mathrm{Ker}(v)$ contient $\mathrm{Ker}(u)$.

Montrer qu'il existe une e application linéaire w de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ telle que $v = w \circ u$.

b) Soit $A \in \mathscr{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{(q,n)}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Ker}(B)$ contient $\mathrm{Ker}(A)$. Déduire de la question précédente qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{(q,p)}(\mathbb{R})$ telle que $B = CA$.

3. Soient A, B et C trois matrices carrées d'ordre n telles que $\mathrm{Ker}(C)$ contient $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B)$.

Montrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre n, U et V, telles que $C = UA + VB$.

4. Déterminer les idéaux à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

FIN DE L'ÉNONCÉ