

Devoir Libre n° 4 : Commutation avec la transposée

On cherche à étudier des matrices commutant avec leur transposée, donc vérifiant la relation

$$M \cdot M^T = M^T \cdot M \quad (1)$$

Dans la suite de l'énoncé, on se contentera alors de dire dans ce cas que la matrice M vérifie la relation (1).

PARTIE A

Dans toute cette partie, les matrices seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire ayant 2 lignes et 2 colonnes et des coefficients réels.

On notera en particulier :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1)
2. Calculer A^2 . En déduire que pour tout, entier naturel non nul n , A^n vérifie la relation (1).

3. Montrer que A est inversible.

Soit u l'unique endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont la matrice relative à la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est A .

4. Préciser les valeurs de $u(\vec{i})$ et $u(\vec{j})$ en fonction de \vec{i} et \vec{j} .
Montrer que u est une symétrie. Préciser l'ensemble des vecteurs invariants.

Dans toute la suite on notera $U = A + I$.

5. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer que, pour tout entier non nul n , il existe un réel α_n tel que $U^n = \alpha_n U$.
En déduire que toutes ses puissances U^n , $n \in \mathbb{N}^*$ vérifient (1)

On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

6. Calculer les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée.
En déduire que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Étant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a , b , c et d pour que M appartienne à E_2 . On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2 .
8. En déduire que E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on précisera pour chacun une base.
9. Étant données M et N deux matrices de E_2 , a-t-on nécessairement $M \cdot N \in E_2$?
On pourra utiliser certaines matrices introduites précédemment dans l'énoncé.

PARTIE B

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de \mathbb{R}^3 que l'on note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On définit alors h comme l'unique endomorphisme de \mathbb{R}^3 vérifiant : $h(\vec{i}) = -\vec{k}$, $h(\vec{j}) = \vec{i}$, $h(\vec{k}) = \vec{j}$ ainsi que $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h)$ sa matrice dans la base \mathcal{B}'

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_3 .

1. Représenter la matrice S
2. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3 .
3. Montrer que pour tous réels a , b et c la matrice $R = aI_3 + bS + cS^2$ appartient à E_3
4. En déduire que E_3 contient un espace vectoriel de dimension 3 que l'on notera F .
5. Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

PARTIE C

On se place ici dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de \mathbb{R}^4 que l'on note $\mathcal{B}'' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque, et on appelle u l'unique

endomorphisme de \mathbb{R}^4 tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}''}(u) = B$

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_4

1. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$.

Dans toute la suite on pose $a = -1$.

2. Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$ et de $\text{Im}(u)$.
3. Calculer $u(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4)$ Que remarque-t-on

4. Calculer $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Commenter le résultat obtenu

5. On note $\mathcal{C} = (\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4)$.

- 5.a) Justifier que \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^4

- 5.b) Déduire de la question précédente $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$

- 5.c) En déduire l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $B = P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale.

On ne demande pas d'expliciter la matrice P^{-1} pour le moment.

6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B^n = P\Delta^n P^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} pour tout entier naturel p en fonction de B et de B^2 .
7. Expliciter la matrice P^{-1} .