DL 2 – Sujet Centrale 2009 PSI Maths 1

Partie I - Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

I.A.1)

```ocaml
let u n =
    (if n mod 2 = 0 then
        1.
    else
        -1.
    ) /. float_of_int n
;;

let suite x n =
    let rec aux p q sommeS liste n =
        match n with
        | 0 -> liste
        | _ ->
            let (p1, q1, s) =
                if sommeS > x then
                    (p, 1 + q, 2 * q + 1)
                else
                    (1 + p, q, 2 * p + 2)
            in
            aux p1 q1 (sommeS +. u s) (s :: liste) (n - 1)
    in
    aux 0 0 0. [] n
;;
```

I.A.2) Il semble sur le dessin que

$S_n \to -1$, en décroissant lorsqu'elle est au dessus de -1, et en croissant sinon

et on conjecture que pour x quelconque, on aura $S_n \to x$ de la même manière.

Le principe de l'algorithme est de sommer les termes de la série harmonique alternée de telle manière qu'on ajoute le premier terme d'indice impair non encore utilisé lorsque la somme partielle est trop grande (ie $> x$) et le premier terme pair non encore utilisé sinon.

I.B - On a déjà, par construction, que pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = u_{s(1)} + \cdots + u_{s(n)}$.

De plus, $p_0 + q_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + q_n + 1$ (dans tous les cas), donc

pour tout $n \geqslant 1$, $p_n + q_n = n$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n la propriété $\{s(1), s(2), ..., s(n)\} = \{2, 4, ..., 2p_n\} \cup \{1, 3, ..., 2q_n - 1\}$
Montrons par récurrence simple que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.
Pour $n = 1$, on a deux cas :

- Soit $x < 0 = S_0$ et alors $q_1 = 1$, $p_1 = 0$, $s(1) = 1$ donc P_1 est vraie.
- Soit $x \geqslant 0 = S_0$ et alors $q_1 = 0$, $p_1 = 1$, $s(1) = 2$ donc P_1 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel P_n est vraie. On a deux cas :

- Soit $S_n > x$ et alors $q_{n+1} = 1 + q_n$, $p_{n+1} = p_n$, $s(n+1) = 2q_{n+1} - 1$ et

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$$

  par hypothèse de récurrence. Alors

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} \cup \{s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\}.$$

- Soit $S_n \leqslant x$ et alors $q_{n+1} = q_n$, $p_{n+1} = 1 + p_n$, $s(n+1) = 2p_{n+1}$ et

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\}$$

  par hypothèse de récurrence. Alors

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\} \cup \{s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\}.$$

ce qui établit la récurrence.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ \{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}.}$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\{s(1), s(2), \dots, s(n)\}| = \left|\{2, 4, \dots, 2p_n\} \sqcup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}\right| = p_n + q_n = n$, donc $\boxed{s \text{ est injective.}}$

I.C.1) Presque une question de cours. Si u est une suite d'entiers convergente vers ℓ, alors à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| < \frac{1}{2}$, donc si $n \geqslant \mathbb{N}$, $|u_n - u_N| \leqslant |u_n - \ell| + |u_N - \ell| < 1$ et donc $u_n = u_N$ car la suite est à valeurs entières.

Finalement, $\boxed{\text{une suite d'entiers convergente est stationnaire.}}$

I.C.2) a) La suite (p_n) étant croissante vu sa définition, si elle est majorée, elle converge par théorème de la limite monotone, donc elle stationne vu la question précédente.

Cela signifie qu'on a un rang n_0 à partir duquel on sera systématiquement dans la première situation. On a alors, pour $n \geqslant n_0$, $\boxed{S_n > x,}$ $p_n = p_{n_0}$, $q_n = q_{n_0} + n - n_0$ et

$$S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_{2q_k - 1} = S_{n_0} - \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{2q_k - 1} = S_{n_0} - \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{2(q_{n_0} + k - n_0) - 1}$$

donc, avec un changement d'indice dans la somme, $\boxed{S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.}$

Or $\frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1} \sim \frac{1}{2k}$ terme général positif de série divergente (série harmonique) donc, par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

et $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$ ce qui contredit le fait que $S_n > x$ à partir du rang n_0.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (p_n) \text{ n'est pas majorée}}$...

b) ... et comme elle est croissante, par théorème de la limite monotone, $\boxed{p_n \to +\infty.}$

I.C.3) On peut effectuer le même genre de raisonnement sur (q_n) : si elle était majorée, comme elle est croissante, elle convergerait, donc serait stationnaire, donc à partir d'un certain rang n_0, on aurait

$$x \geqslant S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2p_{n_0} + 2k - 2n_0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

ce qui est contradictoire. C'est donc que $\boxed{q_n \to +\infty.}$

I.C.4) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, comme $p_n \to +\infty$ et $q_n \to +\infty$, à partir d'un certain rang, $m \leqslant 2p_n$ et $m \leqslant 2q_n + 1$, donc, suivant la parité de m, $m \in \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$, donc m a un antécédent par s qui est bien surjective.

Avec l'injectivité vue en I.B, on a bien que $\boxed{s \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}^*).}$

I.D.1) Traitons quatre cas disjoints :

- Soit $S_{n+1} > x$ et $S_n > x$, donc $u_{s(n+1)} < 0$ et alors $|S_{n+1} - x| = S_{n+1} - x = S_n - x + u_{s(n+1)} < S_n - x = |S_n - x|$.
- Soit $S_{n+1} > x$ et $S_n \leqslant x$, donc $u_{s(n+1)} > 0$ et alors $|S_{n+1} - x| = S_{n+1} - x = S_n - x + u_{s(n+1)} \leqslant u_{s(n+1)} = \left|u_{s(n+1)}\right|$.
- Soit $S_{n+1} \leqslant x$ et $S_n \leqslant x$, donc $u_{s(n+1)} > 0$ et alors $|S_{n+1} - x| = x - S_{n+1} = x - S_n - u_{s(n+1)} < x - S_n = |S_n - x|$.
- Soit $S_{n+1} \leqslant x$ et $S_n > x$, donc $u_{s(n+1)} < 0$ et alors $|S_{n+1} - x| = x - S_{n+1} = x - S_n - u_{s(n+1)} < -u_{s(n+1)} = \left|u_{s(n+1)}\right|$.

Dans tous les cas, $\boxed{|S_{n+1} - x| \leqslant |S_n - x| \quad \text{ou} \quad |S_{n+1} - x| \leqslant |u_{s(n+1)}|.}$

I.D.2) On raisonne par l'absurde : s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $|S_{n+1} - x| > |u_{s(n+1)}|$, alors pour tout $n > N$, $S_{n+1} - x$ et $S_n - x$ ont même signe vu la preuve de la question précédente. Ainsi, à partir d'un certain rang, la position de S_n par rapport à x est constante, ce qui revient à avoir (p_n) ou (q_n) stationnaire, ce qui est exclu.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout naturel } N, \text{ il existe un entier } n > N \text{ tel que } |S_{n+1} - x| \leqslant |u_{s(n+1)}|.}$

I.D.3) Le fait, vu en I.C.2, que $p_n \to +\infty$ et $q_n \to +\infty$ suffit à justifier

$$\boxed{\text{l'existence d'un entier } n_0 \text{ tel que pour } n \geqslant n_0,\ p_n \geqslant 1 \text{ et } q_n \geqslant 1.}$$

(Prendre le maximum des deux rangs.)

I.D.4) On a déjà, avec la question I.D.1, dans tous les cas, $|S_{n+1} - x| \leqslant v_n$ car $u_{s(n+1)} \in \{u_{2p_{n+1}}, u_{2q_{n+1}-1}\}$.

Puis, par croissance de (p_n) et (q_n), et comme ici $p_{n+1} \geqslant 1$ et $q_{n+1} \geqslant 1$, $\left|u_{2p_{n+2}}\right| = \dfrac{1}{2p_{n+2}} \leqslant \left|u_{2p_{n+1}}\right| \leqslant v_n$ et $\left|u_{2q_{n+2}-1}\right| = \dfrac{1}{2q_{n+2} - 1} \leqslant \left|u_{2q_{n+1}-1}\right| \leqslant v_n$.

Ainsi, $v_{n+1} \leqslant v_n$ et $\boxed{(v_n)_{n \geqslant n_0} \text{ est décroissante.}}$ Comme elle est minorée (par 0), elle converge vers $\ell \geqslant 0$.

Or, comme $p_n \to +\infty$ et $q_n \to +\infty$, $u_{2p_{n+1}} \to 0$ et $u_{2q_{n+1}-1} \to 0$.

Si, par l'absurde, $\ell > 0$, on a un rang n_0 à partir duquel $v_n \geqslant \frac{\ell}{2}$, des rangs n_1 et n_2 à partir desquels $\left|u_{2p_{n+1}}\right| < \frac{\ell}{2}$ et $\left|u_{2q_{n+1}-1}\right| < \frac{\ell}{2}$ respectivement.

Donc à partir du rang $N = \max(n_0, n_1, n_2)$, $v_n = |S_n - x| \geqslant \frac{\ell}{2}$.

Mais avec I.D.2, on a $n > N$ tel que $\frac{\ell}{2} \leqslant |S_{n+1} - x| \leqslant \left|u_{s(n+1)}\right| < \frac{\ell}{2}$ ce qui est contradictoire.

On a alors finalement $\boxed{v_n \to \ell = 0.}$

I.D.5) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n - x| \leqslant v_n$, on en déduit que $\boxed{S_n \to x.}$

On a donc su construire, pour tout réel x, $\boxed{\text{une bijection } s \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ telle que } \sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x}$

I.E.1) De multiples démonstrations permettent classiquement d'aboutir au résultat.

On peut par exemple poser pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = H_n - \ln n$ et remarquer que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente, donc convergente, et par télescopage, u l'est, vers un réel γ. On a donc bien $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1).}$

Reste à voir que $\gamma > 0$.

Par comparaison série-intégrale, $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante et continue sur $[1, +\infty[$, en sommant pour $k \in [\![2, n-1]\!]$ l'inégalité $\frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, on obtient $H_n \geqslant 1 + \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{n} = \ln n + 1 - \ln 2 + \frac{1}{n}$ donc $u_n \geqslant \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right) + \frac{1}{n}$. En passant à la limite, on tire $\boxed{\gamma \geqslant \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right) > 0.}$

I.E.2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = H_{2n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = H_{2n} - \frac{H_n}{2} = \ln(2n) + \gamma - \frac{\ln n}{2} - \frac{\gamma}{2} + \mathrm{o}(1)$ donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{\ln n}{2} + \ln 2 + \frac{\gamma}{2} + \mathrm{o}(1).}$

I.E.3) a) Vu I.B, $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_{s(i)}$ et $\{s(1), s(2), \ldots, s(n)\} = \{2, 4, \ldots, 2p_n\} \sqcup \{1, 3, \ldots, 2q_n - 1\}$, on a bien $S_n = \sum_{k=1}^{p_n} u_{2k} + \sum_{k=1}^{q_n} u_{2k-1}$ donc $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.}$

---

b) En utilisant les question I.E.1 et I.E.2, on obtient alors $S_n = \dfrac{\ln(p_n)+\gamma+o(1)}{2} - \left(\dfrac{\ln q_n}{2}+\ln 2+\dfrac{\gamma}{2}+o(1)\right)$ car $p_n \to +\infty$ et $q_n \to \infty$. Donc, avec $q_n = n - p_n$, $\boxed{S_n = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{p_n}{n-p_n}\right) - \ln 2 + o(1).}$

---

c) Ainsi, $\ln\left(\dfrac{p_n}{n-p_n}\right) \to 2(x+\ln 2)$ puis $\dfrac{p_n}{n-p_n} \to e^{2(x+\ln 2)} = 4e^{2x}$ donc $\dfrac{n-p_n}{p_n} = \dfrac{n}{p_n} - 1 \to \dfrac{e^{-2x}}{4}$ puis $\dfrac{n}{p_n} \to 1 + \dfrac{e^{-2x}}{4}$ et finalement $\boxed{p_n \sim \dfrac{4n}{4+e^{-2x}}.}$ Puis $q_n = n - p_n = n - \dfrac{4n}{4+e^{-2x}} + o(n)$ donc $\boxed{q_n \sim \dfrac{ne^{-2x}}{4+e^{-2x}} = \dfrac{n}{4e^{2x}+1}.}$

---

d) Comme en a) et b),

$$|u_{s(1)}|+|u_{s(2)}|+\cdots+|u_{s(n)}| = \sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{q_n}\frac{1}{2k-1} = \frac{\ln(p_n)+\gamma+o(1)}{2}+\left(\frac{\ln q_n}{2}+\ln 2+\frac{\gamma}{2}+o(1)\right) = \ln\sqrt{p_n q_n}+o(\ln n)$$

Mais $\sqrt{p_n q_n} \sim \dfrac{2n}{\sqrt{16e^{2x}+8+e^{-2x}}}$ d'après la question précédente, donc

$$|u_{s(1)}|+|u_{s(2)}|+\cdots+|u_{s(n)}| = \ln n + o(\ln n) \sim \ln n.$$

Et $|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n| = H_n \sim \ln n$.

Donc $\dfrac{|u_{s(1)}|+|u_{s(2)}|+\cdots+|u_{s(n)}|}{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|} \sim 1$ et $\boxed{\dfrac{|u_{s(1)}|+|u_{s(2)}|+\cdots+|u_{s(n)}|}{|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|} \longrightarrow 1.}$

Ainsi, en convergence absolue, il n'y a pas de différence notable lorsque l'on change l'ordre de la sommation dans la série harmonique, contrairement à la série harmonique alternée.

Partie II - Suites vérifiant (P_1) et (P_2)

II.A - Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument. Alors, pour tout suite (u_n) bornée, $|a_n u_n| = \mathcal{O}(|a_n|)$ donc par comparaison des séries à termes positifs, $\sum a_n u_n$ est absolument convergente, donc convergente, donc $\boxed{(a_n) \text{ vérifie } (P_1).}$

II.B.1) On suppose que $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge absolument, donc elle converge, et donc, par télescopage, $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ possède une limite (finie).}}$

II.B.2) Il s'agit d'une transformation d'Abel. Soit N entier naturel. En remarquant que pour $n \geqslant 0$, $u_n = U_n - U_{n-1}$, avec $U_{-1} = 0$,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N} a_n(U_n - U_{n-1}) = \sum_{n=0}^{N} a_n U_n - \sum_{n=\cancel{-1}\,0}^{N-1} a_{n+1} U_n = \sum_{n=0}^{N-1}(a_n - a_{n+1})U_n + a_N U_N.$$

Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1}(a_n - a_{n+1})U_n + a_N U_N.}$

On a une suite réelle (u_n) telle que $\sum u_n$ converge. Alors (U_n) est bornée, et $|(a_n - a_{n+1})U_n| = \mathcal{O}(|a_n - a_{n+1}|)$ est un terme général de série convergente par comparaison des séries à termes positifs, donc, par absolue convergence, $\sum (a_n - a_{n+1})U_n$ converge et par 1), (a_n) et (U_n) convergent donc $(a_n U_n)$ converge et finalement, $\sum a_n u_n$ converge donc (a_n) vérifie (P_2).

II.C - Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{C}$ tel que $u_n = \dfrac{|a_n|}{a_n}$ si $a_n \neq 0$ et $u_n = 1$ sinon.

Alors $(u_n) \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ et $\sum a_n u_n = \sum |a_n|$ diverge.

Comme la suite (u_n) est bornée, une telle suite (a_n) ne vérifie pas (P_1).
Finalement, avec II.A,

les suites vérifiant (P_1) sont exactement les suites (a_n) telles que $\sum a_n$ converge absolument.

II.D.1) On calcule

n	0	1	2	3	4	5
p_n	0	1	2	2	2	3
ε_n	1	1/2	1/4	1/4	1/4	1/8
A_n	1	25/16	7/4	121/64	641/320	41/20

OCaml

```ocaml
let rec exemple n =
    match n with
    | 0 -> [[0; 0; 1; 1.]]
    | _ ->
        let resultat = exemple (n - 1) in
        match resultat with
        | _ :: p :: eps :: A :: [] ->
            let (p1, eps1) =
                if A >= p then
                    (p + 1, eps /. 2.)
                else
                    (p, eps)
            in
            let A1 = A +. eps *. 9 ./. (4. * (float_of_int n +. 1.)) in
            [|n ; p1 ; eps1 ; A1|] :: resultat
;;
```

II.D.2) a) On suppose par l'absurde qu'il existe un rang N à partir duquel on est toujours dans la deuxième situation.

Donc pour $n \geqslant N$, $p_N = p_n > A_n = A_N + \sum_{k=N+1}^{n} a_k \varepsilon_k = A_N + \varepsilon_N \sum_{k=N+1}^{n} a_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est contradictoire.

Donc pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que $p_n = 1 + p_{n-1}$.

On peut bien poser $n_0 = 0$ et si un n_k est défini pour un $k \geqslant 0$, $\{n \in \mathbb{N} \,/\, n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un minimum, ce qui permet de définir n_{k+1}.

Ainsi, la suite (n_k) est bien définie et, par construction, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$, donc elle est strictement croissante.

b) On montre par récurrence simple que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_{n_k} = k$ et $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2^k}$.

C'est bien vrai au rang 0 et si on se donne $k \in \mathbb{N}$ pour lequel c'est vrai, alors par définition, pour tout $n \in [\![n_k, n_{k+1}-1]\!]$, $p_n \neq 1 + p_{n-1}$ donc $p_n = p_{n-1}$ (2e situation) et donc $p_n = p_{n_k} = k$ par hypothèse de récurrence.

Mais alors, toujours par définition, $p_{n_{k+1}} = 1 + p_{n_{k+1}-1} = k+1$ (1re situation).

Mais alors, avec la 2e situation, pour tout $n \in [\![n_k, n_{k+1}-1]\!]$, $\varepsilon_n = \varepsilon_{n_k} = \dfrac{1}{2^k}$ par hypothèse de récurrence et avec la 1re situation, $\varepsilon_{n_{k+1}} = \dfrac{\varepsilon_{n_{k+1}-1}}{2} = \dfrac{1}{2^{k+1}}$ ce qui établit la récurrence.

On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in [\![n_k, n_{k+1}-1]\!]$, $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2^k}$ donc la suite (ε_n) est décroissante, minorée par 0 donc convergente et la suite extraite (par stricte croissance de $(n_k)_k$) $(\varepsilon_{n_k})_k = \left(\dfrac{1}{2^k}\right)_k$ converge vers 0 donc $\boxed{\varepsilon_n \to 0}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour $n = n_k$, on est dans la 1re situation donc $A_{n_k-1} \geqslant p_{n_k-1} = p_{n_{k-1}} = k-1$ donc la suite $\left(A_{n_k-1}\right)_k$ extraite de (A_n) diverge vers $+\infty$, donc

la série $\sum \varepsilon_n a_n$ diverge

car ce sont ses sommes partielles.

c) Pour l'exemple de II.D.1, vu le tableau, $\boxed{n_1 = 1,\ n_2 = 2 \text{ et } n_3 = 5.}$

II.D.3) a)

Python
```python
def indexer(n):
    L = [[0, 0]]
    p, eps, A = 0, 1, 1
    for j in range(1, n + 1):
        if A >= p:
            p += 1
            eps /= 2
            L.append([len(L), j])
        A += eps / (j + 1) # ici, A contient Aj.
    return L
```

b) Soit $k \geqslant 3$ un indice tel que $n_k - 2 > n_{k-1}$. Prouver l'inégalité

$$k - 1 \leqslant A_{n_k-1} \leqslant k - 1 + \frac{1}{2^{k-1} n_k}$$

En déduire que $n_{k+1} - 2 > n_k$.

c) Calculer explicitement la différence $A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}$ en fonction de k, n_k et n_{k+1}. En déduire, pour $k \geqslant 3$, l'inégalité

$$\frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1}\right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leqslant \frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right).$$

d) Déduire des deux questions précédentes, pour $k \geqslant 3$, l'inégalité

$$2^k - \frac{2}{n_k} \leqslant \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leqslant 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right).$$

e) En utilisant une série convenable, étudier la convergence de la suite de terme général $(\ln n_k - 2^k)$; puis prouver l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$n_k \underset{k\to\infty}{\sim} C\exp\left(2^k\right).$$

en déduire que

$$A_{n_k} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n_k)}{\ln 2}$$

puis que

$$A_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln n)}{\ln 2}.$$

Que peut-on penser de l'exécution de la fonction `indexer` ?

II.E - a) En posant, pour $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{sgn}(a_n) = \dfrac{a_n}{|a_n|}$ si $a_n \neq 0$ et 0 sinon, et $\varepsilon'_n = \operatorname{sgn}(a_n)\varepsilon_n$, on a $\left|\varepsilon'_n\right| \leqslant |\varepsilon_n|$ donc $\varepsilon'_n \to 0$ et $\boxed{\sum \varepsilon_n |a_n| = \sum \varepsilon'_n a_n \text{ converge.}}$

---

b) Par contraposée de II.D, le fait que pour toute suite (ε_n) tendant vers 0, $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge nous dit que $\boxed{\sum |a_n| \text{ converge.}}$

II.F.1) Supposons, par exemple, que la suite (a_n) ne soit pas majorée.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a un entier n_k tel que $a_{n_k} \geqslant k^2$. On peut sans perte de généralité, supposer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $n_k > n_{k-1}$ (par exemple avec une construction de la forme de celle de la question II.D.2.)

Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{1}{k^2}$ si n est l'un des n_k et 0 sinon. Alors les sommes partielles de la série $\sum x_n$ sont les sommes partielles de la série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ (répétées chacune $n_{k+1} - n_k$ fois), donc par critère de Riemann, $\sum x_n$ converge.

Mais pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} a_{n_k} \geqslant 1$ donc la suite extraite $(x_{n_k} a_{n_k})_k$ ne converge pas vers 0 donc $\sum x_n a_n$ diverge grossièrement, ce qui est contradictoire.

On démontre de manière similaire que (a_n) est minorée. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$

II.F.2) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Alors, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n a_{n+1} - \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n a_n = \sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_{n-1} a_n - \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n a_n = \varepsilon_N a_{N+1} - \varepsilon_0 a_0 + \sum_{n=1}^{N} (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) a_n$$

avec $\varepsilon_N a_{N+1} \to 0$ car (a_n) est bornée, et la série télescopique $\sum(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)$ converge car $\varepsilon_n \to 0$, donc par hypothèse la série $\sum(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) a_n$ converge.

Ainsi, avec la formule ci-dessus, $\boxed{\text{la série } \sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n) \text{ converge.}}$

II.F.3) La question précédente et la question II.E permettent de conclure directement que $\boxed{\text{la série } \sum |a_{n+1} - a_n| \text{ converge.}}$

II.F.4) Les questions II.B et la question précédente permettent de conclure que

$$\boxed{\text{Les suites vérifiant } (P_2) \text{ sont les suites } (a_n)_n \text{ telles que } \sum |a_{n+1} - a_n| \text{ converge.}}$$

Fin