Corrigé du Devoir Libre n° 2

Problème : Autour des produits infinis (CCP MP 2002)

I. Généralités et exemples

1. Si $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors $P_n \to \ell \neq 0$ donc $u_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \to \dfrac{\ell}{\ell} = 1$: $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } 1.}$

2. (a) Comme $u_n \to 1 > 0$, une propriété sur les limites nous dit qu'$\boxed{\text{il existe un rang } n_0 \text{ à partir duquel } u_n > 0.}$

   (b) Comme, pour $n \geqslant n_0$, $\prod_{p=0}^{n} u_p = \prod_{p=0}^{n_0-1} u_p \prod_{p=n_0}^{n} u_p$, avec $\prod_{p=0}^{n_0-1} u_p \neq 0$, on a bien

$$\boxed{\prod_{n\geqslant 0} u_n \text{ et } \prod_{n\geqslant n_0} u_n \text{ sont de même nature.}}$$

3. (a) $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si P_n a une limite strictement positive si et seulement si $\ln P_n$ converge.

   Or $\ln P_n = \sum_{p=0}^{n} \ln u_p$, donc $\boxed{\prod_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge si et seulement si } \sum_{n\geqslant 0} \ln u_n \text{ converge.}}$

   (b) Comme pour tout $n \geqslant 0$, $1 + u_n > 0$, on peut utiliser la question précédente : $\prod_{n\geqslant 0}(1+u_n)$ converge si et seulement si $\sum_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n)$ converge.

   Or si $\sum_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n)$ converge, alors $\ln(1+u_n) \to 0$ donc $u_n \to 0$ (par continuité de l'exponentielle) et donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

   Si, réciproquement, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors $u_n \to 0$ et toujours avec $\ln(1+u_n) \sim u_n$, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln(1+u_n)$ converge.

   Finalement, $\boxed{\text{le produit infini } \prod_{n\geqslant 0}(1+u_n) \text{ converge si et seulement si la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge.}}$

   (c) On reprend les mêmes arguments avec cette fois $1 - u_n > 0$ et avec $u_n \to 0$, $\ln(1-u_n) \sim -u_n$ équivalent dans lequel les termes sont négatifs, donc le critère de comparaison reste valable (quitte à tout multiplier par -1). $\boxed{\text{Le produit infini } \prod_{n\geqslant 0}(1-u_n) \text{ converge si et seulement si la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge.}}$

4. (a) Le théorème spécial sur des séries alternés s'applique : $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ tend vers 0 en décroissant.

   Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 2} u_n \text{ converge.}}$

(b) Pour tout $n \geqslant 2$, $1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \geqslant 1+\dfrac{-1}{\sqrt{n}} \geqslant 1+\dfrac{-1}{\sqrt{2}} > 0$, donc d'après la question 3.a, $\prod_{n\geqslant 1}(1+u_n)$ a même nature que $\sum_{n\geqslant 2}\ln(1+u_n)$.

Mais comme $u_n \to 0$, $\ln(1+u_n) = u_n - \dfrac{u_n^2}{2} + \mathrm{o}(u_n^2) = u_n - \dfrac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) = u_n - v_n$ où $v_n = \dfrac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{2n} > 0$.
Par comparaisons des séries à termes positifs, comme la série harmonique diverge (série de Riemann, voir aussi la question 6.a), $\sum v_n$ diverge et comme on sait déjà que $\sum u_n$ converge, on en déduit que $\sum \ln(1+u_n)$ diverge.

Finalement, $\boxed{\text{le produit infini } \prod_{n\geqslant 1}(1+u_n) \text{ diverge.}}$

Ainsi, $\boxed{\text{le résultat de la question 3.b ne tient plus si } (u_n) \text{ n'est pas de signe constant.}}$

5. (a) Comme $0 < \dfrac{1}{4n^2} < 1$, la question 3.c s'applique, et $\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\dfrac{1}{4n^2}\right)$ a même nature que $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{4n^2}$ qui est, au cœfficient multiplicatif $\dfrac{1}{4}$ près une série de Riemmann convergente (avec $2 > 1$). Donc

$\boxed{\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\dfrac{1}{4n^2}\right) \text{ converge.}}$

(b) Même argument en remarquant que la condition $x \in]-\pi,\pi[$ donne, pour $x \neq 0$, $0 < 1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2} < 1$, car $0 < x^2 < \pi^2 \leqslant n^2\pi^2$. Pour $x = 0$, la convergence du produit ne pose pas de problème (produit constant 1).

$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-\pi,\pi[,\ \prod_{n\geqslant 1}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \text{ converge.}}$

(c) Si $x > 0$, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}} > 0$, donc d'après la question 3.a, $\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$ a même nature que $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\right)$.
Or $\ln\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\right) = -\dfrac{x}{n} + \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) = -\dfrac{x}{n} + \dfrac{x}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme $\dfrac{1}{n^2}$ est un terme général positif de série de Riemann convergente, $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\right)$ est absolument convergente donc convergente.

Finalement, $\boxed{\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}} \text{ converge pour tout } x \in]0,+\infty[.}$

6. (a) D'après la question 3.b, la série harmonique (dont le terme général est bien strictement positif) a même nature que le produit infini de terme général $1+\dfrac{1}{n} = \dfrac{n+1}{n}$. On reconnaît un produit télescopique :

$$P_n = \prod_{p=1}^{n}\frac{p+1}{p} = \frac{n+1}{1} = n+1 \to +\infty.$$

Donc $\boxed{\text{la série harmonique diverge.}}$

(b) Il s'agit d'une série géométrique convergente car $\left|\frac{1}{p}\right| < 1$, donc $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}.}$ (mais vu la suite, c'est la forme non simplifiée qui va nous être utile.)

(c) L'argument développé par Euler est le suivant : en considérant le « produit partiel » $P_n = \prod_{\ell=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_\ell}}$ et en utilisant le fait que $\frac{1}{1-\frac{1}{p_\ell}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_\ell{}^k}$, on « obtient » que P_n et la somme de l'inverse de tous les nombres entiers admettant comme seuls diviseurs premiers éventuels $p_1, p_2, \ldots, p_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient la somme de l'inverse de tous les entiers, et comme la série harmonique diverge (6.a), le produit infini $\prod_{n\geqslant 1} \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}$ diverge : $P_n \to +\infty$.

Mais alors $\frac{1}{P_n} \to 0$, donc $\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ diverge également.

Enfin, d'après la question 3.c, avec $0 < \frac{1}{p_n} < 1$, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n} \text{ diverge.}}$

Cela suffit sans doute pour avoir tous les points le jour du concours.
Si l'on veut être plus rigoureux que ne l'est Euler, en utilisant la même idée, on peut remarquer que $\frac{1}{1-\frac{1}{p_\ell}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p_\ell{}^k}$ donc (tout est positif), $P_n \geqslant \prod_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k_\ell=0}^{n} \frac{1}{p_\ell^{k_\ell}}\right) = \sum_{0\leqslant k_1,\ldots,k_n\leqslant n}\left(\prod_{\ell=1}^{n} \frac{1}{p_\ell^{k_\ell}}\right) = \sum_{0\leqslant k_1,\ldots,k_n\leqslant n} \frac{1}{\prod_{\ell=1}^{n} p_\ell^{k_\ell}} \geqslant \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q} = H_n$ car la décomposition primaire des q entre 1 et n ne fait intervenir que des nombres premiers entre p_1 et $n \leqslant p_n$ avec des exposants entre 0 et $\log_2 n \leqslant n$, donc les $\frac{1}{q}$ sont certains des termes apparaissant dans la grosse somme.

II. Développement eulérien du sinus et formule de Wallis

7. (a) g est continue par opération sur $]0,x]$ et si $t \in]0,x]$, $g(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t \sin t} = \frac{t - t + \mathrm{o}\left(t^2\right)}{t\sin t} = \mathrm{o}(1)$ car $\sin t \sim t$ donc $g(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 = g(0)$ donc $\boxed{g \text{ est continue sur } [0,x].}$

(b) Soit G un primitive de la fonction continue g. Alors $\boxed{\int_\varepsilon^x g(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} G(x) - G(0) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}$ par continuité de la fonction G.

(c) Or si $\varepsilon > 0$, $\int_\varepsilon^x g(t)\,\mathrm{d}t = [\ln|\sin t| - \ln|t|]_\varepsilon^x = \ln\left|\frac{\sin x}{x}\right| - \ln\left|\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}\right|$ avec $\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1$ et $x \in]0,\pi[$, donc, par unicité de la limite et la question précédente, $\boxed{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \ln\frac{\sin x}{x}.}$

(d) Soit $t \in]0,x]$. En appliquant l'hypothèse de l'énoncé avec $\alpha = \frac{t}{\pi} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - \pi^2 n^2}$, et, avec $g(0) = 0$, la formule reste valable pour $t = 0$. Finalement, $\boxed{\text{pour tout } t \in [0,x],\ g(t) = 2t\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.}$

(e) Soit $t\in[0,x]$. Alors $R_n(t)=2t\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{t^2-n^2\pi^2}$ avec pour tout $n\in[\![1,N]\!]$, $t^2-n^2\pi^2\leqslant x^2-n^2\pi^2\leqslant 0$, puis, si $M\geqslant N$,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{t^2-n^2\pi^2}\right|=\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n^2\pi^2-t^2}\leqslant\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n^2\pi^2-x^2}=\left|\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{x^2-n^2\pi^2}\right|$$

en faisant $M\to+\infty$ et comme $0\leqslant 2t\leqslant 2x$, $\boxed{|R_N(t)|\leqslant|R_N(x)|.}$

(f) Soit $N\in\mathbb{N}$. Comme $x\geqslant 0$ et vu la question précédente,

$$\left|\int_0^x g_N(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^x g_N(t)-g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^x|R_N(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x|R_N(x)|\,\mathrm{d}t=x\,|R_N(x)|.$$

Or $R_N(x)\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$ en tant que reste de série convergente, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^x g_N(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[N\to+\infty]{}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.}$

8. Or $\displaystyle\int_0^x g_N(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{N}\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{N}\left[\ln\left|t^2-n^2\pi^2\right|\right]_0^x=\ln\left(\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\right)$. La question 5 nous assurait déjà de la convergence du produit infini, et on obtient en combinaison avec les questions 7.f, 7.c et la continuité de l'exponentielle que pour $x\in]0,\pi[$, $\boxed{\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\frac{\sin x}{x}.}$

Par parité et sans problème pour $x=0$, on obtient $\boxed{\text{Pour tout } x\in]-\pi,\pi[,\ \sin x=x\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).}$

9. En particulier, pour $x=\dfrac{\pi}{2}$, on obtient $\boxed{\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}.}$

Exercice : E3A PSI 2012

1. $\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{n}$. Comme $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge et que les suites sont à termes positifs, par sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence, et par simplification télescopique $H_n\sim\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)=\ln(n+1)$.

Enfin, $\ln(n+1)=\ln(n)+\ln(1+1/n)\sim\ln(n)$ permet de conclure que $\boxed{H_n\sim\ln(n).}$

2. (a) On pose cette fois $v_n=\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(n))$ (définies pour $n\geqslant 2$). On a des suites à termes strictement positifs. De plus, par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}v_k=\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(2))\to+\infty$ ce qui montre que $\sum v_k$ diverge. Enfin,

$$v_n=\ln\left(\frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)=\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)\sim\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\sim\frac{1}{n\ln(n)}$$

On peut donc encore utilise le théorème de sommation des relations de comparaison dans le cas de divergence pour conclure que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}\sim\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(2))\sim\ln(\ln(n+1))$.

Comme $\ln(\ln(n+1)) = \ln(\ln(n)+\ln(1+1/n)) = \ln(\ln(n)) + \ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) \sim \ln(\ln(n))$ on conclut que

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).}$$

(b) En particulier, la suite des sommes partielles de la série $\sum w_n$ est de limite infinie et $\boxed{\text{la série diverge.}}$

(c) De façon alternative, on peut considérer la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$. f est décroissante et continue sur $[2,+\infty[$ et on peut donc utiliser une comparaison série-intégrale pour montrer que pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $k \in [\![3, n-1]\!]$,

$$\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

et en sommant

$$\frac{1}{n\ln n} + \int_2^n \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_2^n \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\ln 2}$$

avec $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$. Ainsi,

$$1 + \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)} - \frac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)} \leqslant \frac{T_n}{\ln(\ln n)} \leqslant 1 - \frac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)} + \frac{1}{2\ln 2\ln(\ln n)}$$

et donc $\boxed{T_n \sim \ln(\ln n)}$ et $\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{n\ln n} \text{ diverge.}}$

3. Étude de deux exemples

(a) Les trois premiers points de (P) sont vrais et le quatrième aussi (on a une série géométrique de raison 1 qui diverge). Ici, $A_n = n$ et $b_n = \dfrac{1}{\ln(n)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{H_n}{\ln(n)}$.

La question **1** indique que $\boxed{b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$

(b) Les quatre points de la propriété (P) sont vrais (la suite est à valeurs dans $]0,1]$ et la série associée, de Riemann, est divergente). On a $A_k = H_k$ et donc $b_n = \dfrac{1}{\ln(H_n)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kH_k}$.

Posons $u_n = \dfrac{1}{nH_n}$; u et w (définies à partir du rang 2) sont strictement positives à partir du rang 3. Ce sont des termes généraux de suites équivalentes (question **1**), et de séries divergentes (question **2.b**). Le théorème de sommation des relations de comparaisons dans le cas de divergence indique que $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{kH_k} \sim \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}$.

Ajouter les termes d'indices 1 et 2 ne change rien à l'équivalence car les sommes sont de limites infinies (les constantes sont alors négligeables) et avec la question **2.a** on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kH_k} \sim \ln(\ln(n))$.

Enfin, $\ln(H_n) = \ln(\ln(n)) + \ln\left(\dfrac{\ln(n)}{H_n}\right) \sim \ln(\ln(n))$ (le second terme, de limite nulle, est négligeable devant le premier, de limite infinie). On a finalement $\boxed{b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$

4. On revient au cas général

(a) On a $A_n = A_{n-1} + a_n$. Par ailleurs $A_n \to +\infty$ (suite croissante car (a_n) est à termes positives, et non convergente car $\sum a_n$ diverge) et (a_n) est bornée donc $a_n = o(A_n)$. Ainsi, $A_n = A_{n-1} + o(A_n)$ et donc $\boxed{A_n \sim A_{n-1}.}$

(b) On en déduit que $\dfrac{A_n}{A_{n-1}} \to 1$ et donc $\ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right) \sim \dfrac{A_n}{A_{n-1}} - 1 = \dfrac{a_n}{A_{n-1}}$. Enfin, $A_{n-1} \sim A_n$ donne $\boxed{\ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{A_n}.}$

(c) $u_n = \ln\left(\dfrac{A_n}{A_{n-1}}\right)$ est le terme général ($n \geqslant 2$) d'une suite strictement positive et d'une série télescopique divergente ($\sum_{k=2}^{n} u_k = \ln(A_n) - \ln(A_1) \to +\infty$). Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum (a_k/A_k) \text{ diverge.}}$

(d) Plus précisément, comme les suites sont à termes positifs, on peut utiliser le théorème de sommation des relations de comparaisons dans le cas de divergence pour obtenir

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{A_k} \sim \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right) = \ln A_n - \ln A_1.$$

Ces suites sont de limite infinie et ainsi l'équivalence s'écrit $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{A_k} \sim \ln(A_n)$. Ajouter le terme pour $k = 1$ ne change rien car les termes tendent vers $+\infty$. Ainsi $\boxed{b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$

---

5. On va essayer d'utiliser le résultat précédent pour construire (v_n). Pour cela, il nous faut une suite vérifiant (P) et on distingue donc deux cas.

- Si (u_n) est bornée, on pose $a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ a_n = u_n$. On a alors (a_n) qui vérifie (P). $\sum (a_n/A_n)$ diverge (question **4.c**) et $\dfrac{a_n}{A_n} = o(a_n)$ (le quotient vaut $1/A_n$ et tend vers 0). La suite de terme général $v_n = \dfrac{a_n}{A_n}$ convient donc.
- Sinon, on pose $w_n = \min(u_n, 1)$. On a $w_n > 0$ et $\sum w_n$ diverge (car u_n est régulièrement plus grand que 1 et il existe une suite extraite de w qui est constante égale à 1 ce qui donne la divergence grossière de la série). Le premier cas donne une suite $v_n = o(w_n)$ à termes > 0 et de série divergente. On a a fortiori $v_n = o(u_n)$ (puisque $0 \leqslant w_n \leqslant u_n$).