

I. Transformation d'Abel

I.1. a) Immédiat.

b) On peut poser $B_{-1} = 0$, de sorte que la relation $b_n = B_n - B_{n-1}$ est encore vraie pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k b_k &= \sum_{k=0}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^n a_k B_{k-1} = \sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} \quad (\text{car } B_{-1} = 0) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \quad (\text{changement d'indice } k' = k - 1 \text{ dans la 2}^\text{e} \text{ somme}) \\ &= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k. \end{aligned}$$

I.2. a) Il s'agit d'un résultat du cours de Sup (à redémontrer le jour du concours, en revenant à la définition de la limite ou en utilisant le théorème des gendarmes).

b) On suppose la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée; il existe donc un réel B tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|B_n| \leq B$.
Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|(a_n - a_{n+1})B_n| \leq B|a_n - a_{n+1}|$. La série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ étant convergente par hypothèse, les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs assurent la convergence de la série $\sum |(a_n - a_{n+1})B_n|$, c'est-à-dire l'absolue convergence, et donc la convergence, de la série $\sum (a_n - a_{n+1})B_n$.

Cela signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1})B_k$ existe. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n B_n = 0$, la relation démontrée en

1.b montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_k$ existe, c'est-à-dire que la série de terme général $a_n b_n$ converge.

I.3. Supposons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Alors :

$$\sum_{k=0}^n |a_k - a_{k+1}| = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_0,$$

c'est-à-dire que la série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ converge.

Les hypothèses de la question précédente sont donc vérifiées, donc la série de terme général $a_n b_n$ converge.

I.4. Supposons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Si l'on pose $b_n = (-1)^n$ pour tout n , alors $B_n = \sum_{k=0}^n b_k = 0$ ou 1 selon la parité de n , donc la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. D'après la question précédente, la série $\sum a_n b_n$ converge.

On a donc démontré le *critère spécial sur les séries alternées* :

| Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle, la série $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.

(Notez que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle implique $a_n \geq 0$ pour tout n !)

II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

II.1. Le calcul est classique, et a déjà été fait maintes fois depuis la Sup...

Si x est un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{ix} \neq 1$ et les formules bien connues sur les suites géométriques donnent :

$$\begin{aligned} C_n(x) + iS_n(x) &= \sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \\ &= e^{ix} \frac{e^{i\frac{n}{2}x} (e^{-i\frac{n}{2}x} - e^{i\frac{n}{2}x})}{e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} = e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{-2i \sin(\frac{n}{2}x)}{-2i \sin(\frac{x}{2})} = e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}, \end{aligned}$$

d'où en séparant partie réelle et imaginaire :

$$C_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} [\sin\left(\frac{-x}{2}\right) + \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et

$$S_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

II.2. On a donc, pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ fixé, $|S_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$, c'est-à-dire que la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

En appliquant alors le résultat de la question **I.3.** avec $a_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ (la valeur de a_0 importe peu) et $b_n = \sin nx$, on obtient que la série trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$ converge lorsque $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Et puisqu'elle converge aussi lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ ($\sin nx = 0$ pour tout n), on peut donc définir

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

II.3. a) Posons pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \geq 1$: $f_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n}$.

Alors f_N est impaire donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(-x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} -f_N(x) = -f(x),$$

donc f est impaire.

On montre de la même façon que, puisque les f_N sont 2π -périodiques, il en est de même de f .

b) Pour $x \in]0; \pi[$ on a, en utilisant un résultat de la question **II.1.**, et puisque la fonction $t \mapsto \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ est continue sur $]0; \pi[$:

$$\begin{aligned} \int_x^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt &= \int_x^\pi \frac{dt}{2} + \int_x^\pi C_n(t) dt \\ &= \frac{\pi - x}{2} + \int_x^\pi \sum_{k=1}^n \cos kt dt = \frac{\pi - x}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \end{aligned}$$

ce qui est l'égalité demandée.

II.4. a) Puisque $x \in]0; \pi[$, l'intervalle $[x; \pi]$ est inclus dans $]0; \pi[$ donc la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur cet intervalle ; h' étant continue sur le segment $[x; \pi]$ y est bornée.

b) Une intégration par parties (les fonctions considérées étant toutes de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; \pi]$) donne immédiatement :

$$\begin{aligned} \int_x^\pi \underbrace{h(t)}_{u(t)} \underbrace{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}_{v'(t)} dt &= \left[\frac{-1}{n + \frac{1}{2}} \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) h(t) \right]_x^\pi + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_x^\pi h'(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \\ &= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) h(x) + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_x^\pi h'(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt, \end{aligned}$$

ce qui est l'égalité demandée.

c) On en déduit :

$$\begin{aligned} \left| \int_x^\pi h(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \right| &\leq \frac{2}{2n + 1} \left(\underbrace{|\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)|}_{\leq 1} |h(x)| + \left| \int_x^\pi \underbrace{|h'(t)|}_{\leq \|h'\|_\infty} \underbrace{|\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t|}_{\leq 1} dt \right| \right) \\ &\leq \frac{2}{2n + 1} (|h(x)| + |\pi - x| \|h'\|_\infty), \end{aligned}$$

ce qui implique, par le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_x^\pi h(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt = 0$.

Remarque : nous venons de redémontrer, dans un cas particulier, le fameux lemme de Lebesgue.

d) On déduit alors de la question précédente et de la question **II.3.b**, pour tout $x \in]0; \pi[$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Cette égalité est encore vraie évidemment pour $x = \pi$.

Si x appartient à $] \pi; 2\pi[$ on a $x - 2\pi \in] -\pi; 0[$ et $2\pi - x \in]0; \pi[$, donc, h étant 2π -périodique et impaire :

$$f(x) = f(x - 2\pi) = -f(2\pi - x) = -\frac{\pi - (2\pi - x)}{2} = \frac{\pi - x}{2},$$

donc l'égalité est finalement vraie pour $x \in]0; 2\pi[$.

III. Une majoration uniforme des sommes partielles

III.1. a)

$$\begin{aligned} \sum_{p=m+1}^n \frac{\sin px}{p} &= \sum_{p=m+1}^n \frac{S_p(x) - S_{p-1}(x)}{p} = \sum_{p=m+1}^n \frac{S_p(x)}{p} - \sum_{p=m+1}^n \frac{S_{p-1}(x)}{p} \\ &= \sum_{p=m+1}^n \frac{S_p(x)}{p} - \sum_{p=m}^{n-1} \frac{S_p(x)}{p+1} = \left[\frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} \frac{S_p(x)}{p} \right] - \left[\sum_{p=m+1}^{n-1} \frac{S_p(x)}{p+1} + \frac{S_m(x)}{m+1} \right] \\ &= \frac{S_n(x)}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} S_p(x) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) - \frac{S_m(x)}{m+1}. \end{aligned}$$

b) On remarque déjà que, pour $x \in]0; 2\pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|S_n(x)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} = \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On déduit alors de la relation précédente et de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=m+1}^n \frac{\sin px}{p} \right| &\leq \left| \frac{S_n(x)}{n} \right| + \sum_{p=m+1}^{n-1} |S_p(x)| \underbrace{\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right|}_{\geq 0} + \left| \frac{S_m(x)}{m+1} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1}{n} + \sum_{p=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) + \frac{1}{m+1} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{m+1} \right) = \frac{2}{(m+1) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, puisque la série converge (cf. **II.2**), on obtient :

$$\left| \sum_{p=m+1}^{+\infty} \frac{\sin px}{p} \right| \leq \frac{2}{(m+1) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

III.2. a) Par définition de $k = E\left(\frac{\pi}{x}\right)$ on a $kx \leq \pi$ donc pour tout $p \in [1; k]$, $\sin(px) \geq 0$.

D'autre part, on sait que pour tout $X \geq 0$ on a $\sin X \leq X$ donc pour tout $p \in [1; k]$, $\sin(px) \leq px$.

Tout cela combiné donne l'inégalité demandée.

b) Inégalité classique : il suffit d'étudier sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction $\varphi: \theta \mapsto \sin \theta - \frac{2}{\pi}\theta$. On obtient sans peine le tableau de variations suivant :

θ	0	$\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi(\theta)$	0	?	0

qui montre que $\varphi(\theta) \geq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

c) D'après l'inégalité obtenue en **III.1.b** et le résultat précédent (puisque $\frac{x}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}]$), on a :

$$\left| \sum_{p=k+1}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq \frac{2}{(k+1) \sin(\frac{x}{2})} \leq \frac{2}{(k+1) \frac{2}{\pi} \frac{x}{2}} = \frac{2\pi}{(k+1)x} < 2$$

puisque par définition de la partie entière on a $k \leq \frac{\pi}{x} < k+1$.

III.3. En combinant les résultats des deux questions précédentes on a :

$$\forall x \in]0; \pi], \left| \sum_{p=1}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq \left| \sum_{p=1}^k \frac{\sin px}{p} \right| + \left| \sum_{p=k}^n \frac{\sin px}{p} \right| \leq 2 + \pi,$$

et le résultat demeure vrai pour $x \in \mathbb{R}$ puisque la fonction $x \mapsto \left| \sum_{p=1}^n \frac{\sin px}{p} \right|$ est π -périodique.

IV. Calcul de la somme d'une série

IV.1. Notons E l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R} et 2π -périodiques. On peut munir E d'un produit scalaire par :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f | g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$$

(vérification aisée, c'est d'ailleurs un résultat du cours).

Pour ce produit scalaire, il est facile de voir que la famille des fonction $s_n : t \mapsto \sin(nt)$ pour $n \geq 1$ est orthonormale ; en effet, si $n \neq m$ on a

$$\begin{aligned} \langle s_n | s_m \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(n-m)t - \cos(n+m)t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(n-m)t}{n-m} - \frac{\sin(n+m)t}{n+m} \right]_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

et si $n = m$:

$$\|s_n\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2nt)}{2} dt = 1.$$

L'inégalité de Bessel donne alors, pour toute fonction $g \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n b_k^2 = \sum_{k=1}^n \langle g | s_k \rangle^2 \leq \|g\|^2$$

(en effet, $\sum_{k=1}^n \langle g | s_k \rangle^2$ est égal à $\|p(g)\|^2$ où p est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(s_1, \dots, s_n)$, et il est bien connu que $\|p(g)\| \leq \|g\|$).

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} b_n^2$ étant majorées, cette série est convergente.

IV.2. On connaît l'inégalité :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, 2ab \leq a^2 + b^2.$$

On aura donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{b_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(b_n^2 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Les séries $\sum_{n \geq 1} b_n^2$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ étant convergentes, les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs

assurent la convergence de la série de terme général $\left| \frac{b_n}{n} \right|$.

IV.3. a) Il suffit de remplacer b_p par sa valeur pour obtenir la relation demandée.

b) Là encore, la relation demandée est immédiate en remplaçant simplement $\sum_{p=1}^n \frac{b_p}{p}$ par la valeur donnée dans la question précédente.

IV.4. a)

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^\delta \left(f(t) - \sum_{p=1}^n \frac{\sin(pt)}{p} \right) g(t) dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left(|f(t)| + \left| \sum_{p=1}^n \frac{\sin(pt)}{p} \right| \right) |g(t)| dt.$$

Or pour $t \in [0; \pi[$, $|f(t)| = \left| \frac{\pi - t}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2}$ et $\left| \sum_{p=1}^n \frac{\sin(pt)}{p} \right| \leq 2 + \pi$ d'après **III.3** et enfin $|g(t)| \leq M$ d'où l'on obtient :

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^\delta \left(f(t) - \sum_{p=1}^n \frac{\sin(pt)}{p} \right) g(t) dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \delta \left(2 + \pi + \frac{\pi}{2} \right) M \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

L'autre inégalité se démontre exactement de la même manière.

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \left| \int_\delta^{2\pi-\delta} \left(f(t) - \sum_{p=1}^n \frac{\sin(pt)}{p} \right) g(t) dt \right| &\leq \frac{1}{\pi} \int_\delta^{2\pi-\delta} \left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{\sin(pt)}{p} \right| |g(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{2}{(n+1) \sin\left(\frac{t}{2}\right)} M dt \quad (\text{d'après III.1.b}) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \frac{2(2\pi - 2\delta)M}{(n+1) \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \leq \frac{4M}{(n+1) \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}, \end{aligned}$$

puisque si $t \in [\delta; 2\pi - \delta]$, $\frac{t}{2} \in]0; \pi[$ d'où $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \geq \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) > 0$.

c) On peut choisir n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $\frac{4M}{(n+1) \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ puisque cette expression tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

En combinant les 3 inégalités précédentes, on obtient alors :

$$\forall n \geq n_0, \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} \left(f(t) - \sum_{p=1}^n \frac{\sin(pt)}{p} \right) g(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Cela signifie que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \left(\sum_{p=1}^n \frac{\sin(pt)}{p} \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt,$$

ou encore :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{b_p}{p} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt,$$

ce qu'il fallait démontrer.