

## Programme de colle – MPI

### 1. Polynômes et fractions rationnelles

Révision du programme de MP2I : voir programme officiel page suivante.

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
<b>Anneaux <math>\mathbb{K}[X]</math></b>	
Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ .	
Idéaux de $\mathbb{K}[X]$ . Définition du PGCD de $n \geq 2$ polynômes en termes d'idéaux, relation de Bézout. Irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ . Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles unitaires. Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ .	Par convention, le PGCD est unitaire.  La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme. L'étude des irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ pour un corps autre que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est pas un objectif du programme.

### 2. Groupe symétrique

Révision du programme de MP2I : voir programme officiel page suivante.

### 3. Déterminant

Révision du programme de MP2I : voir programme officiel page suivante.

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
<b>Compléments d'algèbre linéaire</b>	
Transvections par blocs. Invariance du déterminant. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	

Semaine prochaine : Réduction (sans polynôme annulateur).

### Questions de cours

- (i)  $(\mathbb{K}[X], +, \times)$  est un anneau principal (et en particulier intègre), description de son groupe d'inversibles et de ses idéaux.
- (ii)  $(\mathbb{K}[X], +, \times)$  est un anneau factoriel : existence et unicité de la décomposition en irréductibles.
- (iii) Décomposition en éléments simples de  $P'/P$ . Déterminant de la transposée.

(iv) Déterminant triangulaire par blocs (par le théorème fondamental).

(v) Déterminant de Vandermonde.

(vi) Formule de la comatrice.

(vii) **CCINP 59** : Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq 2$ .

Soit  $E$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On pose :  $\forall P \in E, f(P) = P - P'$ .

1. Démontrer que  $f$  est bijectif de deux manières :

- (a) sans utiliser de matrice de  $f$ ,
- (b) en utilisant une matrice de  $f$ .

2. Soit  $Q \in E$ . Trouver  $P$  tel que  $f(P) = Q$ .

**Indication** : si  $P \in E$ , quel est le polynôme  $P^{(n+1)}$  ?

3. (5/2)  $f$  est-il diagonalisable ?

(viii) **Ex CCINP 63** : Soit un entier  $n \geq 1$ . On considère la matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour  $n \geq 1$ , on désigne par  $D_n$  le déterminant de  $A_n$ .

- 1. Démontrer que  $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$ .
- 2. Déterminer  $D_n$  en fonction de  $n$ .
- 3. (5/2) Justifier que la matrice  $A$  est diagonalisable. Le réel 0 est-il la valeur propre de  $A$  ?

(ix) **CCINP 85** :

1. Soient  $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $a \in \mathbb{R}$ .

(a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de  $P(X)$  dans la base  $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ .

(b) Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . En déduire que :

$a$  est une racine de  $P$  d'ordre de multiplicité  $r$  si et seulement si  $P^{(r)}(a) \neq 0$  et  $\forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$ .

2. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  pour que 1 soit racine double du polynôme  $P = X^5 + aX^2 + bX$  et factoriser alors ce polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$ .

(x) **CCINP 87** : Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$   $n+1$  réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si  $b_0, b_1, \dots, b_n$  sont  $n+1$  réels quelconques, alors il existe un unique polynôme  $P$  vérifiant  $\deg P \leq n$  et  $\forall i \in \{0, \dots, n\} P(a_i) = b_i$ .

2. Soit  $k \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket$ .

Expliciter ce polynôme  $P$ , que l'on notera  $L_k$ , lorsque  $\forall i \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$

3. Prouver que  $\forall p \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$ .

(xi) **CCINP 90** :  $\mathbb{K}$  désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient  $a_1, a_2, a_3$  trois scalaires distincts donnés de  $\mathbb{K}$ .

- Montrer que  $\Phi : \mathbb{K}_2[X] \rightarrow \mathbb{K}^3$   

$$P \mapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3))$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^3$  et on pose  $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$ .
  - Justifier que  $(L_1, L_2, L_3)$  est une base de  $\mathbb{K}_2[X]$ .
  - Exprimer les polynômes  $L_1, L_2$  et  $L_3$  en fonction de  $a_1, a_2$  et  $a_3$ .
- Soit  $P \in \mathbb{K}_2[X]$ . Déterminer les coordonnées de  $P$  dans la base  $(L_1, L_2, L_3)$ .
- Application** : on se place dans  $\mathbb{R}^2$  muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points  $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$ .  
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points  $A, B$  et  $C$ .

## 4. Programme de MP2I

### A. Polynômes et fractions rationnelles

Contenus	Capacités & commentaires
<p><b>a) Anneau des polynômes à une indéterminée</b></p> <p>Anneau <math>\mathbb{K}[X]</math>.  Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.  Degré d'une somme, d'un produit.  Composition.</p>	<p>La construction de <math>\mathbb{K}[X]</math> est hors programme.  Ensemble <math>\mathbb{K}_n[X]</math> des polynômes de degré au plus <math>n</math>.  L'anneau <math>\mathbb{K}[X]</math> est intègre.</p>
<p><b>b) Divisibilité et division euclidienne</b></p> <p>Divisibilité dans <math>\mathbb{K}[X]</math>, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés.  Théorème de la division euclidienne.</p>	<p>Algorithme de la division euclidienne.</p>
<p><b>c) Fonctions polynomiales et racines</b></p> <p>Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.  Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.  Multiplicité d'une racine.  Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).</p>	<p>Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ».  Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.  Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.</p> <p>Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants; les autres doivent être retrouvées rapidement.</p>
<p><b>d) Dérivation</b></p> <p>Dérivée formelle d'un polynôme.</p> <p>Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.  Formule de Taylor polynomiale.</p>	<p>Pour <math>\mathbb{K} = \mathbb{R}</math>, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.</p>

Contenus	Capacités & Commentaires
<p>Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.</p> <p><b>e) Arithmétique dans <math>\mathbb{K}[X]</math></b></p> <p>PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.  Algorithme d'Euclide.</p> <p>Relation de Bézout.</p> <p>PPCM.  Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss.  PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.</p> <p><b>f) Polynômes irréductibles de <math>\mathbb{C}[X]</math> et <math>\mathbb{R}[X]</math></b></p> <p>Théorème de d'Alembert-Gauss.  Polynômes irréductibles de <math>\mathbb{C}[X]</math>. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans <math>\mathbb{C}[X]</math>.</p> <p>Polynômes irréductibles de <math>\mathbb{R}[X]</math>. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans <math>\mathbb{R}[X]</math>.</p> <p><b>g) Formule d'interpolation de Lagrange</b></p> <p>Si <math>x_1, \dots, x_n</math> sont des éléments distincts de <math>\mathbb{K}</math> et <math>y_1, \dots, y_n</math> des éléments de <math>\mathbb{K}</math>, il existe un unique polynôme <math>P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]</math> tel que <math>P(x_i) = y_i</math> pour tout <math>i</math>.</p> <p><b>h) Fractions rationnelles</b></p> <p>Corps <math>\mathbb{K}(X)</math>.  Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle.  Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.</p> <p><b>i) Décomposition en éléments simples sur <math>\mathbb{C}</math> et sur <math>\mathbb{R}</math></b></p> <p>Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur <math>\mathbb{C}</math> et sur <math>\mathbb{R}</math>.</p> <p>Si <math>\lambda</math> est un pôle simple, coefficient de <math>\frac{1}{X-\lambda}</math>.</p> <p>Décomposition en éléments simples de <math>\frac{P'}{P}</math>.</p>	<p>Tout diviseur commun à <math>A</math> et <math>B</math> de degré maximal est appelé un PGCD de <math>A</math> et <math>B</math>.  L'ensemble des diviseurs communs à <math>A</math> et <math>B</math> est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de <math>A</math> et <math>B</math> sont associés. Un seul est unitaire, on le note <math>A \wedge B</math>.  Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.  Notation <math>A \vee B</math>.  Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans <math>\mathbb{Z}</math>.</p> <p>La démonstration est hors programme.  Caractérisation de la divisibilité dans <math>\mathbb{C}[X]</math> à l'aide des racines et des multiplicités.  Deux polynômes de <math>\mathbb{C}[X]</math> sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune.  Factorisation de <math>X^n - 1</math> dans <math>\mathbb{C}[X]</math>.  Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de <math>\mathbb{R}[X]</math> ont même multiplicité.</p> <p>Expression de <math>P</math>.  Description des polynômes <math>Q</math> tels que <math>Q(x_i) = y_i</math> pour tout <math>i</math>.</p> <p>La construction de <math>\mathbb{K}(X)</math> est hors programme.</p> <p>La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue.  Application au calcul de primitives, de dérivées <math>k</math>-ièmes.</p>

## B. Groupe symétrique

Le groupe symétrique est introduit en vue de l'étude des déterminants, mais aussi pour son intérêt propre et ses interventions possibles dans diverses questions d'algèbre et de probabilités.

Contenus	Capacités & commentaires
<b>a) Généralités</b>	
Groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ . Cycle, transposition. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.	Notation $S_n$ . Notation $(a_1 a_2 \dots a_p)$ . La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.
<b>b) Signature d'une permutation</b>	
Décomposition d'une permutation en produit de transpositions. Signature : il existe un unique morphisme de groupes de $S_n$ dans $\{-1, 1\}$ envoyant toute transposition sur $-1$ .	La démonstration n'est pas exigible.

## C. Déterminants

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;
- établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;
- indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.

Contenus	Capacités & commentaires
<b>a) Formes <math>n</math>-linéaires alternées</b>	
Forme $n$ -linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n$ . Antisymétrie, effet d'une permutation.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures. Si $f$ est une forme $n$ -linéaire alternée et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .
<b>b) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base</b>	
Si $e$ est une base, il existe une unique forme $n$ -linéaire alternée $f$ pour laquelle $f(e) = 1$ ; toute forme $n$ -linéaire alternée est un multiple de $\det_e$ . Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées.	Notation $\det_e$ . La démonstration de l'existence n'est pas exigible.  Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$ ), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Comparaison, si $e$ et $e'$ sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$ . La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .	
<b>c) Déterminant d'un endomorphisme</b>	
Déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.
<b>d) Déterminant d'une matrice carrée</b>	
Déterminant d'une matrice carrée.	Caractère $n$ -linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes.
Déterminant d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles. L'application $\det$ induit un morphisme de $GL(E)$ (resp. $GL_n(\mathbb{K})$ ) sur $\mathbb{K}^*$ .	Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .

Contenus	Capacités & Commentaires
Déterminant d'une transposée.	Caractère $n$ -linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.

### e) Calcul des déterminants

Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire. Déterminant de Vandermonde.	Lien avec les polynômes de Lagrange.
--	--------------------------------------

### f) Comatrice

Comatrice. Relation $A \operatorname{Com}(A)^T = \operatorname{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$ .	Notation $\operatorname{Com}(A)$ . Expression de l'inverse d'une matrice inversible.
--	---