Programme de colle – MPI

1. Approximation uniforme, séries de fonctions numériques d'une variable réelle

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
e) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions. Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme.	La convergence normale implique la convergence absolue en tout point. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.
f) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier. Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible.

On introduit la notion de norme uniquement pour manipuler la norme ∞ pour le moment. L'intégration et la dérivation des séries de fonctions seront traitées plus tard.

2. Calcul matriciel

Révisions complètes du programme de MP2I. Voir page suivante.
À cela s'ajoute :
Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Compléments d'algèbre linéaire	
Matrices définies par blocs. Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	Interprétation géométrique des blocs. La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible.

3. Continuité, uniforme continuité des fonctions numériques

Révision du programme de MP2I (voir page suivante).

La caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité est utile en particulier pour démontrer une absence d'uniforme continuité.

Le théorème de Heine permet en particulier de démontrer le théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.

La fonction racine carrée est un exemple d'application uniformément continue (car $1/2$-hölderienne) mais non lipschitzienne.

Semaine prochaine : Révisions et compléments de polynômes, fractions rationnelles, groupe symétrique, déterminants.

Questions de cours

(i) Toute matrice de rang r est équivalente à J_r.

(ii) Théorème d'approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier (cas des fonctions continues bien détaillé).

(iii) Tout énoncé de théorème concernant les séries de fonctions ou les approximations uniformes avec **hypothèses très précises** (approximations uniformes par des polynômes ou des fonctions en escalier, continuité locale ou globale, limite).

Définition et implications (à justifier) entre les différents modes de convergence (simple, uniforme, absolue, normale).

(iv) Fonction ζ de Riemann : définition, convergence simple, normale, variations, limites en $+\infty$, équivalent et limite en 1, absence de convergence uniforme au voisinage de 1, tracé.

(v) Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité et théorème de Heine.

(vi) **CCINP 8** :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.
   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.
   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x)=\dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

(vii) **CCINP 15** : Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R\in\mathbb{R}_+^*$?

(viii) **CCINP 17** : Soit $A \subset \mathbb{C}/\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\right)$$

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0;+\infty[,\ f_n(x) = n x^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

(ix) **CCINP 18** : On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

(x) **CCINP 53** : On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

   (c) $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(xi) **CCINP 59** : Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. On pose $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :

   (a) sans utiliser de matrice de f,

   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. (5/2) f est-il diagonalisable ?

(xii) **CCINP 71** : Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

4. Révisions de MPSI

A. Calcul matriciel

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^{\top}$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	
b) Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	
c) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX=B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les X_0+Y, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.
e) Anneau des matrices carrées	
Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Inverse d'une transposée.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX=Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

B. Matrices et applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a+ib$.
Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
c) Systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	Structure affine de l'ensemble des solutions.
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

C. Changements de bases, équivalence et similitude

Contenus	Capacités & commentaires
a) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre.	
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.	
Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
b) Matrices équivalentes et rang	
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r.	La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
Matrices équivalentes.	
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.	Classification des matrices équivalentes par le rang.
Invariance du rang par transposition.	
Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
c) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables.	Interprétation géométrique. Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
Trace d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{tr}(A)$.
Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, invariance par similitude.	
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$.	Notation $\mathrm{tr}(u)$. Trace d'un projecteur.

D. Continuité

Contenus	Capacités & commentaires
Continuité en un point	
Continuité, prolongement par continuité en un point.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.
Continuité à gauche, à droite.	
Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.	
Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
Continuité sur un intervalle	
Continuité sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Principe de démonstration par dichotomie.
Image d'un intervalle par une fonction continue.	
Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.	
Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	
Image d'un segment par une fonction continue.	
Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone.	La démonstration n'est pas exigible.
Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible.
Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.
Continuité uniforme	
Continuité uniforme.	Exemple des fonctions lipschitziennes.
Théorème de Heine.	La démonstration n'est pas exigible.