

Programme de colle – MPI

1. Espaces vectoriels, applications linéaires

Révisions complètes du cours de MP2I sur les applications linéaires. (Voir programme page suivante). À cela s'ajoute :

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Compléments d'algèbre linéaire	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Si F_1, \dots, F_p sont des sous-espaces de dimension finie, $\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe. Si E_1, \dots, E_p sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout i , alors il existe une et une seule $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u _{E_i} = u_i$ pour tout i .	Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe. Base adaptée à une décomposition en somme directe.

2. Suites de fonctions numériques d'une variable réelle

Extrait du programme officiel :

Les fonctions sont définies sur une partie de \mathbb{R} , à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme.
b) Continuité, double limite (à partir de mardi)	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur A , alors u est continue en a . En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A . Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A , et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n , u_n admet une limite ℓ_n en a , alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.	Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation. La démonstration est hors programme. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.

On introduit la notion de norme uniquement pour manipuler la norme ∞ pour le moment. L'intégration et la dérivation des suites de fonctions seront traitées plus tard.

Questions de cours

- (i) Théorème du rang.
- (ii) Formule de Grassmann : deux démonstrations, avec des supplémentaires et avec des applications linéaires.
- (iii) Si $k \geq 0$ et A partie non vide majorée de \mathbb{R} , $\sup(kA) = k \sup A$.
La norme ∞ sur un espace de fonctions bornées est une norme.
- (iv) Définitions des convergences simple et uniforme.
Si les $f_n - f$ sont uniformément bornées par une suite $\alpha_n \rightarrow 0$, alors il y a convergence uniforme de la suite (f_n) vers f .
Une limite uniforme de fonctions bornées est bornée.
- (v) **CCINP 9** (à partir de mardi) :
1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans \mathbb{C} et g une fonction de X dans \mathbb{C} .
Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g .
 2. On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.
 - a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .
 - b. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?
 - c. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
 - d. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?
- (vi) **CCINP 11** :
1. Soit X une partie de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions de X dans \mathbb{R} convergeant simplement vers une fonction f .
On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X .
 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
 - a. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .
 - b. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.
- (vii) **CCINP 12** (à partir de mardi) :
1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f , et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0 , avec $x_0 \in [a, b]$.
Démontrer que f est continue en x_0 .
 2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], g_n(x) = x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

(viii) **CCINP 60** : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

(ix) **CCINP 62** : Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
 - i. en utilisant le lemme des noyaux ;
 - ii. sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

(x) **CCINP 64** : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que : $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2$.
2.
 - i. Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
 - ii. Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

(xi) **CCINP 87** : Soient a_0, a_1, \dots, a_n $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si b_0, b_1, \dots, b_n sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg P \leq n$ et $\forall i \in \{0, \dots, n\} P(a_i) = b_i$.
2. Soit $k \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket$. Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque

$$\forall i \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket \quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

(xii) **CCINP 90** : \mathbb{K} désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de \mathbb{K} .

1. Montrer que

$$\begin{array}{ccc} \Phi: \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{K}^3 et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

(a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

(b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .

4. **Application** : On se place dans \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.

Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

(xiii) **CCINP 93** (extrait) : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. Montrer que $\text{Im } u \oplus \text{Ker } u = E$.

3. Applications linéaires (MP2I)

Extrait du programme officiel :

Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F . Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$. Application linéaire de rang fini. Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	Caractérisation de l'injectivité. Notation $\text{rg}(u)$.
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties. Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.	Notations id_E, id . Non commutativité si $\dim E \geq 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \text{id}$. Automorphismes. Groupe linéaire.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3. Notation $\text{GL}(E)$. Notation u^k pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$. Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension. Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimension finie. Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2 .	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u .
d) Théorème du rang	
Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$. Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $n = \dim \text{Ker } u + \text{rg}(u)$.	

e) Formes linéaires et hyperplans

Forme linéaire.

Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$.

Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.

Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.

Si E est un espace de dimension finie n , l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

Formes coordonnées relativement à une base.

Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

En dimension n , les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.

Système d'équations d'un sous-espace vectoriel; cas des droites vectorielles de \mathbb{R}^2 , des droites et plans vectoriels de \mathbb{R}^3 .

L'étude de la dualité est hors programme.

Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs. Translation.

Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine.

Intersection de sous-espaces affines.

Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\text{Ker } u$.

L'écriture $B = A + \vec{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Sous-espaces affines de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques, la recherche de polynômes interpolateurs.