Programme de colle – MPI

1. Espaces vectoriels

Révisions du cours d'algèbre linéaire de MP2I concernant les espaces vectoriels (voir programme page suivante).

2. Structures algébriques

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Compléments sur les groupes	
Intersection de sous-groupes.	
~~Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe.~~	
Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$.	
~~Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.~~	
~~Groupe monogène, groupe cyclique.~~	~~Groupe des racines n-ièmes de l'unité.~~
~~Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.~~	
~~Ordre d'un élément d'un groupe.~~	~~L'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.~~
~~Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^n = e \iff d \mid n$.~~	
~~L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.~~	~~La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.~~
b) Compléments sur les anneaux	
Produit fini d'anneaux.	
Idéal d'un anneau commutatif.	Noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs.
Idéal engendré par un élément.	Notation xA.
Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation en termes d'idéaux.
c) Idéaux de $\mathbb{Z}$	
Idéaux de $\mathbb{Z}$.	
~~Définition du PGCD de $n \geqslant 2$ entiers relatifs en termes d'idéaux, relation de Bézout.~~	~~Lien avec le programme de première année.~~
f) Algèbres	
Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$.
Sous-algèbre.	
Morphisme d'algèbres.	

Les notions d'ordre d'un élément dans un groupe, de groupe engendré par une partie, de groupe monogène ou cyclique, l'arithmétique sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{K}[X]$ seront re·vues plus tard.

Semaine prochaine : Algèbre linéaire : espaces vectoriels et applications linéaires. Suites et séries de fonctions (1re partie).

Questions de cours

(i) Intersection quelconque de sous-groupes. Cas de la réunion de deux sous-groupes.

(ii) Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau principal.

(iii) Images directe et réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupe. Tout corps est intègre.

(iv) Définition d'un idéal. Les idéaux d'un corps sont triviaux. Le noyau d'un morphisme d'anneau est un idéal.

(v) Définition d'un idéal principal, d'un anneau principal. La somme et l'intersection de deux idéaux sont des idéaux.

(vi) Exercice classique : image directe ou réciproque d'un sous-anneau ou d'un idéal par un morphisme d'anneaux.

(vii) **CCINP 55** : Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2a\, u_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n \text{ avec } (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

(a) i. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

ii. Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.

(b) Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.

Indication : discuter suivant les valeurs de a.

3. Programme de MP2I

A. Structures algébriques

Contenus	Capacités & commentaires
a) Loi de composition interne	
Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable.	On évite l'étude de lois artificielles. Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
b) Structure de groupe	
Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble.	Notation S_X.
Groupe produit.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Sous-groupe : définition, caractérisation.	
Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.	
Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité.	Notations $\mathfrak{Im}\, f$, $\operatorname{Ker} f$.
Isomorphisme.	

c) Structures d'anneau et de corps

Contenus	Capacités & Commentaires
Anneau.	Tout anneau est unitaire. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Calcul dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	
Anneau intègre. Corps.	Les corps sont commutatifs.
Sous-anneau.	
Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	

B. Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires

a) Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^{\Omega}$, cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.

b) Sous-espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Notations $\mathrm{Vect}(A)$, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\mathrm{Vect}(A)$.

c) Familles de vecteurs

Contenus	Capacités & commentaires
Famille (partie) génératrice.	
Famille (partie) libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

d) Somme de deux sous-espaces

Contenus	Capacités & commentaires
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

C. Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	