9

Groupe symétrique et déterminant (MP2I)

1 Groupe symétrique

Définition 1 : Permutation, groupe symétrique

Si E est un ensemble, on appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E. On note $\mathfrak{S}(E)$ leur ensemble.

Si $E = [\![1,n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{S}_n$ appelé **groupe symétrique d'ordre n (ou de degré n)** cet ensemble.

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Remarque

R 1 – Attention ! $\mathfrak{S}_n$ n'est pas de cardinal n mais ...

Propriété 1 : Structure

$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe d'ordre (ie de cardinal) $n!$, non abélien dès que $n \geqslant 3$.

Définition 2 : Support

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, son **support** est l'ensemble des éléments de $[\![1,n]\!]$ qui **ne sont pas** invariants par σ.

Propriété 2 : Commutation de permutations à supports disjoints

Deux permutations à supports disjoints commutent.

Exercice 1 : Centre de $\mathfrak{S}_n$

1. **Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, et $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(i\ j)$ commutent, $\{i,j\}$ est stable par σ. La réciproque est-elle vraie ?**
2. **Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$ le centre de $\mathfrak{S}_n$, partie de $\mathfrak{S}_n$ des permutations commutant avec toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$ est $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{N}_n}\}$. Étudier le cas où $n = 2$.**

Définition 3 : Transposition, cycle

- Une **transposition** τ est une permutation qui échange deux éléments i et j de $[\![1,n]\!]$, et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i,j\}$.
  On la note $\tau = (i\ j)$ ou parfois $\tau_{i,j}$.
  $\tau_{i,j}(i) = j$, $\tau_{i,j}(j) = i$ et si $k \notin \{i,j\}$, $\tau_{i,j}(k) = k$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant p \leqslant n$.
  On appelle **p-cycle** une permutation c de $\mathfrak{S}_n$ qui permute circulairement p éléments $i_1, i_2, \ldots, i_n$ de $[\![1,n]\!]$ et laisse les autres invariants ie dont le support est $\{i_1, \ldots, i_p\}$ et telle que
  $$c(i_1) = i_2\ ;\ c(i_2) = i_3\ ;\ \cdots\ ;\ c(i_{p-1}) = i_p\ ;\ c(i_p) = i_1$$
  p est la **longueur** du cycle c. On note $c = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_p)$.

Exercice 2 : Conjugaison de cycle (souvent utile)

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et c un cycle, décrire $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

Théorème 1 : Unique décomposition en produit de cycles à supports disjoints

Toute permutation se décompose en produit (composée) de cycles à supports disjoints. La décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Corollaire 1 : Décomposition en produit de transpositions (non unique)

Toute permutation se décompose en produit (composée) de transpositions.

Définition 4 : Inversions, signature

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** par σ tout couple (i,j) tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions par σ.

On appelle **signature** de σ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \in \{-1,1\}$.

On vérifie que $\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

Une permutation σ est dite **paire** lorsque $I(\sigma)$ est pair et donc $\varepsilon(\sigma) = 1$. Elle est dite **impaire** dans le cas contraire.

Remarque

R 2 – La définition avec les inversions peut être oubliée tout de suite. Ce n'est pas ce qui importe dans la signature : il vaut mieux savoir se ramener à des cycles ou à des transpositions (voir ci-après).

Théorème 2 : Morphisme de signature

Soit $n \geqslant 2$. L'application

$$\varepsilon : \left| \begin{array}{ccc} (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow & (\{-1,1\}, \times) = (\mathbb{U}_2, \times) \\ \sigma & \longmapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupe, ie si $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.

Propriété 3 : de la signature

(i) *Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en produit de N transpositions, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^N$.*
En particulier, cette décomposition n'est pas unique mais la parité du nombre de termes est toujours celle de la permutation.

(ii) *Si c est un p-cycle, $\varepsilon(c) =$*

(iii) *Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) = \varepsilon(\sigma)$.*

Voir exercice du TD : 4 à 18

2 Formes n-linéaires

Définition 5 : Application n-linéaire

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Une application $f : E^n \to F$ est dite **n-linéaire** lorsque pour tout $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n$, et tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$f_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n) \end{array} \right.$$

est linéaire. (Linéarité par rapport à la i^{e} variable.) c'est-à-dire $\forall (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n, \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n) \\ &= f(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n) \\ &\quad + \lambda f(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n) \end{aligned}$$

On note $\mathscr{L}_n(E, F)$ l'ensemble des formes n-linéaires.

Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n-linéaire**.

Propriété 4 : Espace vectoriel de applications n-linéaires

$\mathscr{L}_n(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 6 : Symétrie, antisymétrie et caractère alterné

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E, \mathbb{K})$.

- f est dite **symétrique** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n, \quad \forall i \neq j$,

- f est dite **antisymétrique** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n, \quad \forall i \neq j$,

- f est dite **alternée** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n, \quad \forall i \neq j$,

Propriété 5 : Caractérisations

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E, \mathbb{K})$.

(i) *f est symétrique si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \forall (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n$,*

(ii) *f est antisymétrique si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \forall (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n$,*

(iii) *f est alternée si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n$,*

Propriété 6 : Équivalence entre alternée et antisymétrique

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire. Alors f est alternée si et seulement si f est antisymétrique.

Remarque

R 3 – Le sens réciproque est vraie car $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, c'est-à-dire si $2_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Théorème 3 : fondamental

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$.

Si $n = \dim E$, l'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Remarque

R4 – Deux formes n-linéaires alternées sur E de dimension n (oui, c'est bien le même n les deux fois) sont donc toujours proportionnelles, c'est ce qui importe.

Plus précisément, une base $\mathscr{B}$ de E étant donnée, il existe une unique forme n-linéaire alternée envoyant $\mathscr{B}$ sur le scalaire 1. On va l'appeler déterminant dans la base $\mathscr{B}$, noté $\det_{\mathscr{B}}$, et toute forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathscr{B}}$.

Voir exercice du TD : 11

3 Déterminant

a Définitions

On fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.

Définition 7 : Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

On appelle **déterminant dans la base $\mathscr{B}$** l'unique forme n-linéaire alternée sur E notée $\det_{\mathscr{B}}$ telle que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Si pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $\vec{x}_j \in E$ de coordonnées $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ dans $\mathscr{B}$, alors

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) =$$

On note

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Remarque

R5 – Par définition, le déterminant est n-linéaire alterné. En particulier, le déterminant d'une famille liée est nul.

Propriété 7 : du déterminant

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases de E.

(*i*) ***Formule de changement de base*** :

(*ii*) $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$ *et* $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) =$

(*iii*) $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ *est libre / une base de E si et seulement si* $\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Propriété 8 : Interprétation géométrique

(*i*) *Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

(*ii*) *Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.*

On montre que si $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$. On en déduit la définition :

Définition 8 : Déterminant d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u le scalaire

$$\det u = \det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) = \det_{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$$

où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E.

Propriété 9 : du déterminant d'un endomorphisme

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

(*i*) $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E$,
$\det_{\mathscr{B}}(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_n)) =$

(*ii*) $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.

(*iii*) $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$.

(*iv*) ⚠ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda u) =$

(*v*) $u \in \mathscr{GL}(E) \iff \det u \neq 0$.

(*vi*) $\det : (\mathscr{GL}(E), \circ) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(*vii*) *Si $u \in \mathscr{GL}(E)$, $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$.*

Remarque

R6 – ⚠ $\det$ n'est pas linéaire : $\det(u + v) \neq \det u + \det v$ en général.

Voir exercice du TD : 16

Définition 9 : du déterminant d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. On définit le **déterminant** de A par

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

Remarque

R7 – Dans chaque terme de la somme, on choisit exactement un terme par colonne et par ligne.

R8 – Un définition alternative équivalente consisterait à faire agir la permutation sur le numéro de colonne : c'est l'égalité avec le déterminant de la transposée de la propriété suivante :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Propriété 10 : du déterminant d'une matrice carrée

(i) *Si $C_1, \dots, C_n$ sont les vecteurs colonnes de A et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\det A = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$.*

(ii) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté par A dans une base de E, alors $\det A = \det u$.*

(iii) $\det I_n = 1$.

(iv) *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det AB = \det A \det B$.*

(v) ⚠ *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^{n} \det A$.*

(vi) $\det A^{\top} = \det A$.

(vii) $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$.

(viii) $\det : (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(ix) *Si A est inversible, $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$.*

(x) *Des matrices semblables ont même déterminant : le déterminant est un invariant de similitude.*

Remarque

R9 – ⚠ $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général : det n'est pas linéaire.

b Calculs

Propriété 11 : Opérations sur un déterminant

(i) *Si une ligne ou une colonne est nulle, ou une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.*

(ii) *On ne change pas le déterminant avec les opérations*

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_j \leftarrow C_j + \sum_{k \neq i} \lambda_k C_k$$

(transvections successives.)

(iii) *En multipliant par λ une ligne ou une colonne, on multiplie par λ le déterminant.*

(iv) *Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1. Plus généralement, si on permute les lignes ou les colonnes avec une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.*

(v) *Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses cœfficients diagonaux.*

Définition 10 : Mineurs, cofacteurs, comatrice

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $i, j \in [\![1,n]\!]$.

- On appelle **mineur** d'indice (i,j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu en retirant L_i et C_j à A.
- On appelle **cofacteur** d'indice (i,j) le nombre $C_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.
- On appelle **comatrice** de A la matrice de ses cofacteurs :

Propriété 12 : Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) ***Développement par rapport à** L_i $\forall i \in [\![1,n]\!]$,*

(ii) ***Développement par rapport à** C_j $\forall j \in [\![1,n]\!]$,*

Exercice 3 : CCINP 63

Propriété 13 : Déterminant de matrice triangulaire par blocs

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, alors

$$\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Remarque

R 10 – ⚠ même lorsque toutes les matrices sont carrées, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$ ou autre $\det(AD - BC)$ en général !

Propriété 14 : Déterminant de Vandermonde

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$,

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=$$

Remarque

R 11 – $V(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Voir exercice du TD : 9, 10, 12 à 14

c Formule de la comatrice

Propriété 15 : Formule de la comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

Si, de plus, A est inversible, alors

Remarque

R 12 – Intérêt théorique. Utile en pratique seulement si $n = 2$ ou 3.

Voir exercice du TD : 17, 19

d Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Définition 11 : Avoir même orientation qu'une base

On dit qu'une base $\mathscr{B}$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel **a même orientation** qu'une autre base $\mathscr{B}'$ lorsque

Remarque

R 13 – ⚠ Cela n'a aucun sens dans $\mathbb{C}$!

Propriété 16 : Relation d'équivalence

C'est une relation d'équivalence avec exactement deux classes d'équivalences.

Définition 12 : Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Orienter un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est décider qu'une base est **directe**. Alors toutes les bases de même orientation sont dites directes.

Toutes les autres, qui ont même orientation, sont dites **indirectes**.

e Formules de Cramer (HP)

Propriété 17 : Formules de Cramer (HP)

Soit (S) un système de Cramer, c'est-à-dire à n équations et n inconnues et de matrice $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$. On sait que $(S) : Ax = b$ admet une unique solution $x = (x_1 \; \cdots \; x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soient $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

Remarque

R 14 – De nouveau, un intérêt surtout théorique !

Exercice 4

Résoudre $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & d^2 \end{array} \right.$

lorsqu'il s'agit d'un système de Cramer.