7

Continuité et continuité uniforme des fonctions numériques (MP2I)

I Continuité

1 Définition

Définition 1 : Continuité

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$.

f est dite continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. f est dite **continue sur** I lorsque f est continue en tout point de I.

On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(I)$ ou $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(I)$ l'ensemble de telles fonctions.

Propriété 1 : Caractérisations séquentielles

f est continue en a

$$\Longleftrightarrow \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \to a,\ f(a_n) \to f(a).$$

$$\Longleftrightarrow \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \to a,\ (f(a_n)) \text{ converge}.$$

2 Cas des fonctions à valeurs réelles

Dans ce paragraphe, toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

Théorème 1 : des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Si $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $m \in [f(a) ; f(b)]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $m = f(c)$.

Autrement dit, $[f(a) ; f(b)] \subset f([a, b])$.

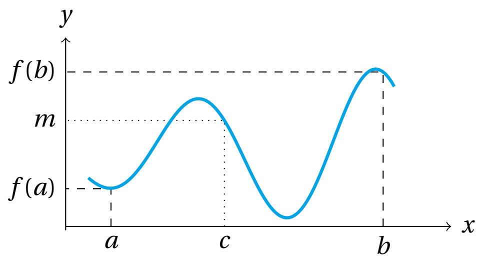

Figure 1 – Le théorème des valeurs intermédiaires

Corollaire 1 : Extension du théorème des valeurs intermédiaires

Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$ et admet des limites $\lim\limits_{a^+} f$ à droite de a et $\lim\limits_{b^-} f$ à gauche de b, alors pour tout $m \in \left]\lim\limits_{a^+} f ; \lim\limits_{b^-} f\right[$, on a $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = m$.

Autrement dit, $\left]\lim\limits_{a^+} f ; \lim\limits_{b^-} f\right[\subset f(]a, b[)$.

Corollaire 2 : Image continue d'un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Autrement dit, si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème 2 : des bornes atteintes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Ainsi, si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors on a $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) = \min\limits_{[a,b]} f$ et $f(d) = \max\limits_{[a,b]} f$.

Corollaire 3 : Image continue d'un segment

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Avec les notations précédentes, f étant continue sur $[a, b]$,

$$f\big([a, b]\big) = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right] = [f(c), f(d)]$$

Propriété 2 : Stricte monotonie d'une fonction continue injective sur un intervalle

Si f est continue et injective sur un intervalle I, f est strictement monotone sur I.

Théorème 3 : de la bijection

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I à valeurs réelles. Alors

(i) *f induit une bijection $\tilde{f}$ de I sur $J = f(I)$.*

(ii) *$\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que f.*

(iii) *$\tilde{f}^{-1}$ est continue sur J.*

Définition 2 : Homéomorphisme (HP)

$f : I \to J$ est appelé **homéomorphisme** lorsque f est bijective et bicontinue, c'est-à-dire f continue sur I et f^{-1} est continue sur J.

Le « théorème de la bijection » se reformule alors en

Théorème 4 : Théorème de l'homéomorphisme

Toute fonction continue strictement monotone induit de I sur $J = f(I)$ un homéomorphisme.

II Uniforme continuité

La continuité dont on a parlé jusqu'à maintenant était une propriété locale : au voisinage d'un point a, si je me reproche de a, alors mon image par f se rapproche de $f(a)$, ce qui s'écrit formellement :

$$\forall a \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

Définition 3 : Uniforme continuité

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **uniformément continue** sur I si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in I,\ \left|x - y\right| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon$$

Cela impose que si x et y sont suffisamment proches, mais n'importe où dans I, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont proches également.

Ainsi, pour des fonctions à trop grandes variations, on pourra ne pas avoir uniforme continuité.

Propriété 3 : UC ⇒ Continue

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I. Réciproque fausse.

Propriété 4 : Caractérisation séquentielle

f est uniformément continue sur I si et seulement si $\forall\, (x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}} \mid x_n - y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Propriété 5 : Stabilités

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

⚠ Faux pour un produit ou un quotient.

Théorème 5 : de Heine

*Tout fonction continue sur un **segment** est uniformément continue sur ce segment.*

Théorème 6

Toute fonction continue par morceau sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

III Fonctions lipschitziennes

Définition 4 : Fonction lipschitzienne

$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite k-lipschitzienne sur X (où $k \in \mathbb{R}_+^*$) si

$$\forall\, x, y \in X,\ \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k\left|x - y\right|.$$

Propriété 6 : Lipschitzienne ⇒ UC

Toute fonction lipschitzienne (ou plus généralement hölderienne) sur I y est uniformément continue. La réciproque est fausse.