7

Continuité et continuité uniforme des fonctions numériques (MP2I)

I Continuité

1 Définition

Définition 1 : Continuité

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$.

f est dite continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. f est dite **continue sur** I lorsque f est continue en tout point de I.

On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(I)$ ou $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(I)$ l'ensemble de telles fonctions.

Remarque

R 1 – Ainsi, f n'est pas continue en a si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \text{ et } |f(x)-f(a)| > \varepsilon.$$

R 2 – f est continue en a si et seulement si f est définie en a et a une limite finie en a.

R 3 – f est continue en a si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ le dont.

Propriété 1 : Caractérisations séquentielles

f est continue en a

$$\Longleftrightarrow \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \to a,\ f(a_n) \to f(a).$$

$$\Longleftrightarrow \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \to a,\ (f(a_n)) \text{ converge.}$$

Remarque

R 4 – Une combinaison linéaire, un produit, un quotient, une composée de fonctions continues l'est encore.

$\mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $(\mathbb{K}^I, +, \times, \cdot)$.

R 5 – Être continue en a est équivalent à être continue à gauche et à droite de a.

2 Cas des fonctions à valeurs réelles

Dans ce paragraphe, toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

Théorème 1 : des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Si $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $m \in [f(a) \,\bar{;}\, f(b)]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $m = f(c)$.

Autrement dit, $[f(a) \,\bar{;}\, f(b)] \subset f([a, b])$.

Remarque

R 6 – $[f(a) \,\bar{;}\, f(b)]$ signifie $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$ selon la position relative de $f(a)$ et $f(b)$.

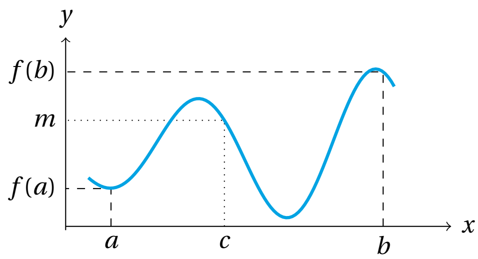

Figure 1 – Le théorème des valeurs intermédiaires

Remarque

R 7 – La réciproque est fausse : on peut vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continu.

C'est le cas par exemple de la fonction $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{vmatrix}$ discontinue en 0.

Corollaire 1 : Extension du théorème des valeurs intermédiaires

Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$ et admet des limites $\lim_{a^+} f$ à droite de a et $\lim_{b^-} f$ à gauche de b, alors pour tout $m \in \left]\lim_{a^+} f ; \lim_{b^-} f\right[$, on a $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = m$.

Autrement dit, $\left]\lim_{a^+} f ; \lim_{b^-} f\right[\subset f(]a, b[)$.

Exercice 1

Montrer qu'un polynôme réel de degré impair a toujours au moins une racine réelle.

Corollaire 2 : Image continue d'un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Autrement dit, si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque

R8 – ⚠ En général $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$ et $f(]a, b[) \neq \left]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f\right[$.

R9 – Le type de l'intervalle n'est pas conservé en général.

Théorème 2 : des bornes atteintes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Ainsi, si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors on a $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) = \min_{[a,b]} f$ et $f(d) = \max_{[a,b]} f$.

Corollaire 3 : Image continue d'un segment

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Avec les notations précédentes, f étant continue sur $[a, b]$,

$$f\big([a, b]\big) = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right] = [f(c), f(d)]$$

Propriété 2 : Stricte monotonie d'une fonction continue injective sur un intervalle

Si f est continue et injective sur un intervalle I, f est strictement monotone sur I.

Théorème 3 : de la bijection

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I à valeurs réelles. Alors

(i) f induit une bijection $\tilde{f}$ de I sur $J = f(I)$.

(ii) $\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que f.

(iii) $\tilde{f}^{-1}$ est continue sur J.

Définition 2 : Homéomorphisme (HP)

$f : I \to J$ est appelé **homéomorphisme** lorsque f est bijective et bicontinue, c'est-à-dire f continue sur I et f^{-1} est continue sur J.

Le « théorème de la bijection » se reformule alors en

Théorème 4 : Théorème de l'homéomorphisme

Toute fonction continue strictement monotone induit de I sur $J = f(I)$ un homéomorphisme.

II Uniforme continuité

La continuité dont on a parlé jusqu'à maintenant était une propriété locale : au voisinage d'un point a, si je me reproche de a, alors mon image par f se rapproche de $f(a)$, ce qui s'écrit formellement :

$$\forall a \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

Définition 3 : Uniforme continuité

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **uniformément continue** sur I si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in I,\ \left|x - y\right| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon$$

Cela impose que si x et y sont suffisamment proches, mais n'importe où dans I, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont proches également.

Ainsi, pour des fonctions à trop grandes variations, on pourra ne pas avoir uniforme continuité.

Propriété 3 : UC ⇒ Continue

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I. Réciproque fausse.

Propriété 4 : Caractérisation séquentielle

f est uniformément continue sur I si et seulement si $\forall\, (x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}} \mid x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarque

R 10 – N'apparaît pas dans le programme officiel, mais très utile pour démontrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue.

Propriété 5 : Stabilités

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

⚠ Faux pour un produit ou un quotient.

Exemple

E 1 – $f : x \mapsto |x|$

E 2 – $f : x \mapsto x^2$

E 3 – $f : x \mapsto \sqrt{x}$

E 4 – $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Remarque

R 11 – La fonction $\sqrt{\cdot}$ vérifie

$$\forall\, x, y,\quad \sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant k \times |x-y|^{1/2},$$

on dit qu'elle est $1/2$-hölderienne. Toute fonction α-hölderienne est facilement uniformément continue.

Théorème 5 : de Heine

Tout fonction continue sur un ***segment*** *est uniformément continue sur ce segment.*

Théorème 6 : Approximation uniforme des fonctions CPM sur un segment par des fonctions en escalier

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

III Fonctions lipschitziennes

Définition 4 : Fonction lipschitzienne

$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite k-lipschitzienne sur X (où $k \in \mathbb{R}_+^*$) si

$$\forall\, x, y \in X,\quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k\left|x-y\right|.$$

Propriété 6 : Lipschitzienne $\Rightarrow$ UC

Toute fonction lipschitzienne (ou plus généralement hölderienne) sur I y est uniformément continue. La réciproque est fausse.

Remarque

R 12 – f lipschitzienne $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ f uniformément continue $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ f continue.

Plus précisément :

f lipschitzienne $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ f höldérienne $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ f uniformément continue $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ f continue.

Exemple

E 5 – $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne

E 6 – Par inégalité des accroissements finis, une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$ (c'est le cas si elle est de classe $\mathscr{C}^1$) à dérivée bornée sera lipschitzienne donc uniformément continue. C'est le cas par exemple des fonctions $\sin$ et $\cos$.