# 7

# Continuité et continuité uniforme des fonctions numériques (MP2I)

# Table des matières



# I Continuité

## 1 Définition

**Définition 1 : Continuité**

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$.
$f$ est dite continue en $a$ si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in I,\ \ |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. $f$ est dite **continue sur** $I$ lorsque $f$ est continue en tout point de $I$.
On note $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(I)$ ou $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(I)$ l'ensemble de telles fonctions.

**Remarque**

**R 1** – Ainsi, $f$ n'est pas continue en $a$ si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0,\ \ \forall \eta > 0,\ \ \exists x \in I,\ \ |x-a| \leqslant \eta \text{ et } \left|f(x) - f(a)\right| > \varepsilon.$$

**R 2** – $f$ est continue en $a$ si et seulement si $f$ est définie en $a$ et a une limite finie en $a$.

**R 3** – $f$ est continue en $a$ si et seulement si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ le dont.

**Propriété 1 : Caractérisations séquentielles**

*$f$ est continue en $a$*

$$\Longleftrightarrow \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \to a,\ f(a_n) \to f(a).$$

$$\Longleftrightarrow \forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \to a,\ (f(a_n)) \text{ converge}.$$

**Remarque**

**R4 –** Une combinaison linéaire, un produit, un quotient, une composée de fonctions continues l'est encore. $\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $(\mathbb{K}^I,+,\times,\cdot)$.

**R5 –** Être continue en $a$ est équivalent à être continue à gauche et à droite de $a$.

## 2 Cas des fonctions à valeurs réelles

Dans ce paragraphe, toutes les fonctions sont à valeurs réelles.

**Théorème 1 : des valeurs intermédiaires**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Si $a,b \in I$ tels que $a<b$ et $m \in [f(a) \overset{\leftrightarrow}{;} f(b)]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $m = f(c)$.*

*Autrement dit, $[f(a) \overset{\leftrightarrow}{;} f(b)] \subset f([a,b])$.*

**Remarque**

**R6 –** $[f(a) \overset{\leftrightarrow}{;} f(b)]$ signifie $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$ selon la position relative de $f(a)$ et $f(b)$.

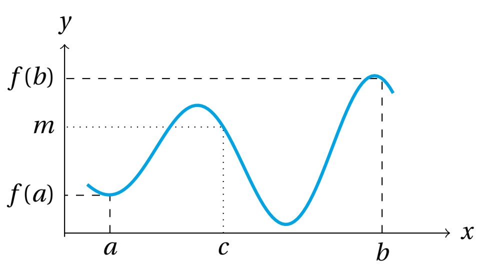


FIGURE 1 – Le théorème des valeurs intermédiaires

**Remarque**

**R7 –** La réciproque est fausse : on peut vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continu.

C'est le cas par exemple de la fonction $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$ discontinue en $0$.

**Corollaire 1 : Extension du théorème des valeurs intermédiaires**

*Si $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a<b$, $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ continue sur $]a,b[$ et admet des limites $\lim\limits_{a^+} f$ à droite de $a$ et $\lim\limits_{b^-} f$ à gauche de $b$, alors pour tout $m \in \left]\lim\limits_{a^+} f \overset{\leftrightarrow}{;} \lim\limits_{b^-} f\right[$, on a $c \in ]a,b[$ tel que $f(c) = m$.*

*Autrement dit, $\left]\lim\limits_{a^+} f \overset{\leftrightarrow}{;} \lim\limits_{b^-} f\right[ \subset f(]a,b[)$.*

**Exercice 1**

**Montrer qu'un polynôme réel de degré impair a toujours au moins une racine réelle.**

En effet, comme on a des limites $\pm\infty$ ou $\mp\infty$ en $\pm\infty$, notre polynôme continu prend au moins une valeur positive et une valeurs négative sur $\mathbb{R}$.

**Corollaire 2 : Image continue d'un intervalle**

*L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*
*Autrement dit, si $f$ est continue sur un intervalle $I$, alors $f(I)$ est un intervalle.*

**Remarque**

**R 8 –** ⚠ En général $f([a,b]) \neq [f(a), f(b)]$ et $f(]a,b[) \neq \left]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f\right[$.

**R 9 –** Le type de l'intervalle n'est pas conservé en général.

**Théorème 2 : des bornes atteintes**

*Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*

*Ainsi, si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et si $f$ est continue sur le segment $[a,b]$, alors on a $c, d \in [a,b]$ tels que $f(c) = \min_{[a,b]} f$ et $f(d) = \max_{[a,b]} f$.*

**Corollaire 3 : Image continue d'un segment**

*L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*
*Avec les notations précédentes, $f$ étant continue sur $[a,b]$,*

$$f\big([a,b]\big) = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f\right] = [f(c), f(d)]$$

**Propriété 2 : Stricte monotonie d'une fonction continue injective sur un intervalle**

*Si $f$ est continue et injective sur un intervalle $I$, $f$ est strictement monotone sur $I$.*

**Théorème 3 : de la bijection**

*Soit $f$ continue et strictement monotone sur un intervalle $I$ à valeurs réelles. Alors*

(i) *$f$ induit une bijection $\tilde{f}$ de $I$ sur $J = f(I)$.*

(ii) *$\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même monotonie que $f$.*

(iii) *$\tilde{f}^{-1}$ est continue sur $J$.*

**Définition 2 : Homéomorphisme (HP)**

$f : I \to J$ est appelé **homéomorphisme** lorsque $f$ est bijective et bicontinue, c'est-à-dire $f$ continue sur $I$ et $f^{-1}$ est continue sur $J$.

Le « théorème de la bijection » se reformule alors en

**Théorème 4 : Théorème de l'homéomorphisme**

*Toute fonction continue strictement monotone induit de $I$ sur $J = f(I)$ un homéomorphisme.*

# II UNIFORME CONTINUITÉ

La continuité dont on a parlé jusqu'à maintenant était une propriété locale : au voisinage d'un point $a$, si je me reproche de $a$, alors mon image par $f$ se rapproche de $f(a)$, ce qui s'écrit formellement :

$$\forall a \in I,\quad \forall \varepsilon > 0,\quad \exists \eta > 0,\quad \forall x \in I,\quad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

**Définition 3 : Uniforme continuité**

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que $f$ est **uniformément continue** sur $I$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists \eta > 0,\quad \forall x, y \in I,\quad \left|x-y\right| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon$$

Cela impose que si $x$ et $y$ sont suffisamment proches, mais n'importe où dans $I$, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont proches également.

Ainsi, pour des fonctions à trop grandes variations, on pourra ne pas avoir uniforme continuité.

**Propriété 3 : UC ⇒ Continue**

*Une fonction uniformément continue sur $I$ est continue sur $I$. Réciproque fausse.*

**Démonstration**

Si

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists \eta > 0,\quad \forall a, x \in I,\quad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

alors

$$\forall a \in I,\quad \forall \varepsilon > 0,\quad \exists \eta > 0,\quad \forall x \in I,\quad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant \varepsilon.$$ ■

**Propriété 4 : Caractérisation séquentielle**

*$f$ est uniformément continue sur $I$ si et seulement si* $\forall\, (x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}} \mid x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

**Remarque**

**R 10 –** N'apparaît pas dans le programme officiel, mais très utile pour démontrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue.

**Démonstration**

($\Rightarrow$) Si $f$ uniformément continue et $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\varepsilon > 0$.

On a $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in I,\quad \left|x-y\right| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \varepsilon$ or on a $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\quad x_n - y_n \leqslant \eta$, ainsi $\forall n \geqslant N,\quad f(x_n) - f(y_n) \leqslant \varepsilon$ et donc $f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

($\Leftarrow$) Par contraposée, si $f$ n'est pas uniformément continue, on a $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0,\ \exists x, y \in I,\ \left|x-y\right| \leqslant \eta$ et $\left|f(x) - f(y)\right| > \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\eta = \dfrac{1}{n+1}$, on a $x_n, y_n$ des réels tels que $\left|a_n - y_n\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $\left|f(x_n) - f(y_n)\right| > \varepsilon$. Ainsi, $x_n - y_n \to 0$ et $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$. ■

**Propriété 5 : Stabilités**

*Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.*

⚠ Faux pour un produit ou un quotient.

**Exemple**

E 1 – $f : x \mapsto |x|$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

E 2 – $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ : problème si $x \to \pm\infty$ (pente trop forte). $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$ alors $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$ mais $x_n^2 - y_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \not\to 0$.

E 3 – $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (malgré la pente infinie en 0) : si $x_n - y_n \to 0$, on peut supposer $x_n \geqslant y_n$, alors

$$\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = x_n - 2\sqrt{x_n y_n} + y_n \leqslant x_n - 2y_n + y_n = x_n - y_n \to 0.$$

Donc $\left|\sqrt{x}_n - \sqrt{y}_n\right| \leqslant \sqrt{|x_n - y_n|}$. Donc $\sqrt{x}_n - \sqrt{y}_n \to 0$.

E 4 – $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$ problème si $x \to 0$ (pente trop forte).
$x_n = \frac{2}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ alors $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$ mais $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = -\frac{n}{2} \not\to 0$.

**Remarque**

R 11 – La fonction $\sqrt{\cdot}$ vérifie

$$\forall\, x, y, \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant k \times |x-y|^{1/2},$$

on dit qu'elle est $1/2$-hölderienne. Toute fonction $\alpha$-hölderienne est facilement uniformément continue.

**Théorème 5 : de Heine**

*Tout fonction continue sur un **segment** est uniformément continue sur ce segment.*

**Démonstration**

Si $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue non uniformément continue, on a $\varepsilon > 0$ et $(x_n)_n, (y_n)_n \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et pour tout $n$, $f(x_n) - f(y_n) > \varepsilon$. (voir preuve de la caractérisation séquentielle).

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite bornée $x$ une suite convergente $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$, puis de la suite bornée $\left(y_{\varphi(n)}\right)_n$ une suite convergente $\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_n$. Alors $\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_n$ est aussi convergente comme suite extraite de $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ et $x_{\varphi\circ\psi(n)} - y_{\varphi\circ\psi(n)} \to 0$ donc les deux limites sont égales à $\ell$.

Alors, par continuité, $f\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \to f(\ell)$ et $f\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \to f(\ell)$ donc

$$f\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right) \to 0$$

ce qui contredit $f\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right) > \varepsilon$. ∎

**Théorème 6 : Approximation uniforme des fonctions CPM sur un segment par des fonctions en escalier**

*Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.*

**Démonstration**

**Cas continu** Soit $\varepsilon > 0$. Par théorème de Heine, $f$ est uniformément continue sur $[a,b]$. On a donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall\, x, y \in [a,b], \quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

On choisit une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ de pas $h = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(a_{k+1}-a_k) \leqslant \eta$.

On définit alors $\varphi : x \mapsto \begin{cases} f(a_k) & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}[ \\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x \in [a,b[$, on a $k$ tel que $x \in [a_k, a_{k+1}[$ et $|x - a_k| \leqslant |a_{k+1} - a_k| \leqslant \eta$ donc $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(a_k)| \leqslant \varepsilon$, soit $x = b$ et $|f(b) - \varphi(b)| = 0 \leqslant \varepsilon$.

On a donc bien $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

**Cas continu par morceaux** Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ adaptée à $f$.

Chaque $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge par continuité en une fonction $f_k$ continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ : on a $\varphi_k \in \mathscr{E}([a,b])$ telle que $\|f_k - \varphi_k\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

On pose alors $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in ]a_k, a_{k+1}[ \\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x \in [a,b]$, soit on a $k$ tel que $x \in ]a_k, a_{k+1}[$ et $|\varphi(x) - f(x)| = |\varphi_k(x) - f_k(x)| \leqslant \varepsilon$ soit on a $k$ tel que $x = a_k$ et $|\varphi(a_k) - f(a_k)| = 0 \leqslant \varepsilon$.

On a donc bien $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

**Définition d'une suite** Quitte à prendre $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ où $n \in \mathbb{N}$, on construit une suite $(\varphi_n)$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \ \|f - \varphi_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}$, donc telle que $\varphi_n \xrightarrow{CU} f$. ■

# III Fonctions lipschitziennes

**Définition 4 : Fonction lipschitzienne**

$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite $k$-lipschitzienne sur $X$ (où $k \in \mathbb{R}_+^*$) si

$$\forall x, y \in X, \ \ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

**Propriété 6 : Lipschitzienne ⇒ UC**

*Toute fonction lipschitzienne (ou plus généralement hölderienne) sur $I$ y est uniformément continue. La réciproque est fausse.*

**Remarque**

**R 12 –** $f$ lipschitzienne $\not\Longleftarrow$ $f$ uniformément continue $\not\Longleftarrow$ $f$ continue.

Plus précisément :

$f$ lipschitzienne $\not\Leftarrow$ $f$ höldérienne $\not\Leftarrow$ $f$ uniformément continue $\not\Leftarrow$ $f$ continue.

**Démonstration**

$\forall x, y \in I, \ \ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|^\alpha$ ($\alpha = 1$ si lipschitzienne).
Donc si $x_n - y_n \to 0$, $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. ■

**Exemple**

**E 5 –** $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne car si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \ \ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant k|x - y|$$

avec $k > 0$, on va avoir un problème près de zéro (pente trop forte). Pour $y = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \sqrt{x} \leqslant kx$ et si $x \neq 0$, $\sqrt{x} \geqslant \frac{1}{k}$ donc $x \geqslant \frac{1}{k^2}$. Contradiction.

**E 6 –** Par inégalité des accroissements finis, une fonction continue sur $I$ et dérivable sur $\mathring{I}$ (c'est le cas si elle est de classe $\mathscr{C}^1$) à dérivée bornée sera lipschitzienne donc uniformément continue. C'est le cas par exemple des fonctions $\sin$ et $\cos$.