6

Calcul matriciel

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Sauf mention contraire, n, p, q, r, s désignent des entiers naturels non nuls.

I Calcul matriciel

1 Espaces de matrices

Propriété 1 : Espace vectoriel de matrices

(*i*) $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'élément nul* $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

(*ii*) $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

Définition 1 : Base canonique

On appelle **base canonique** $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,p})$ où

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \\ \uparrow \\ j \end{array}$$

$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$ s'écrit de manière unique $\sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$.

Propriété 2 : Cœfficients des matrices élémentaires

$$\forall\, i, k \in [\![1, n]\!],\quad \forall\, j, \ell \in [\![1, p]\!],\quad (E_{i,j})_{k,\ell} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}.$$

Définition 2 : Produit matriciel

On définit

$$\times : \begin{vmatrix} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & C = A \times B \end{vmatrix}$$

avec $\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \ \forall\, j \in [\![1, q]\!],\ \ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$.

Propriété 3 : Bilinéarité, associativité, neutre

(*i*) ***Associativité*** *: Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

(*ii*) ***Bilinéarité*** *: Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $A \mapsto A \times B$ *et* $B \mapsto A \times B$ *sont linéaires.*

(*iii*) ***Neutre*** *: Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \times I_p = I_n \times A = A$.

Propriété 4 : $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$

Lorsque les tailles sont compatibles,

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$$

Théorème 1 : Produit par blocs

Soit les matrices par blocs $M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{p} & \overleftrightarrow{q} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \updownarrow n \\ \updownarrow m \end{array} \end{array}$ *et* $N = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{r} & \overleftrightarrow{s} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array} \end{array}$ *où* A, B, C, D, E, F, G, H *sont des matrices de format correspondant. Alors*

$$M \times N = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m, r+s}(\mathbb{K}).$$

2 Transposition

Définition 3 : Transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice $A^\intercal \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall\, (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!],\quad (A^\intercal)_{i,j} = (A)_{j,i}$$

Propriété 5 : de la transposition

Soit $T : \begin{vmatrix} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^\intercal \end{vmatrix}$

(*i*) ***Linéarité*** *: Si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(A + B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal \quad \text{et} \quad (\lambda A)^\intercal = \lambda A^\intercal$$

(*ii*) *T est **involutif** : si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^\intercal)^\intercal = A$.

(*iii*) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A \times B)^\intercal = B^\intercal \times A^\intercal$.

3 Matrices carrées

a La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Propriété 6 : Algèbre des matrices carrées

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau, ni commutatif ni intègre dès que $n \geqslant 2$, d'élément unité I_n. Ainsi, $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times,\cdot)$ est une K-algèbre de dimension n^2.

Propriété 7 : Formules du Binôme et $A^m - B^m$

Si $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $\boxed{A\times B = B\times A}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$$A^m - B^m = (A-B)\left(A^{m-1} + A^{m-2}B + \cdots + AB^{m-2} + B^{m-1}\right)$$

Définition 4 : Groupe linéaire

On appelle **groupe linéaire** le groupe $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ des inversible de l'anneau $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$.

Propriété 8

(i) $(\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe.

(ii) Si $A,B \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, $A\times B \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A\times B)^{-1} = B^{-1}\times A^{-1}$.

(iii) Si $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(iv) Sont équivalentes :
- *A est inversible*
- *A est inversible à gauche*
- *A est inversible à droite*
- *les colonnes de A forment une famille libre*
- *les lignes de A forment une famille libre*

(v) Si $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0_{\mathbb{K}}\}$ et $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, $\lambda A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.

(vi) $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $A^\intercal \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et dans ce cas $(A^\intercal)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\intercal$

Méthode 1 : Calcul pratique

Pour démontrer l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse, on peut :

- Résoudre le système $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$: il admet une unique solution si et seulement si A est inversible et alors on obtient $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$.
- Effectuer des opérations élémentaires (pivot de Gauss) :
  - ⋆ soit exclusivement sur les lignes,
  - ⋆ soit exclusivement sur les colonnes,

  se ramener à I_n et effectuer les mêmes opérations simultanément en partant de I_n qui va devenir A^{-1} si A est inversible.
- Reconnaître une matrice de passage (cf plus loin).
- Utiliser la formule de la comatrice si $n=2$ ou 3 (voir déterminant).

b Matrices carrées particulières

Définition 5 : Matrices triangulaires, diagonales, scalaires

- On appelle **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) tout matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i > j,\ \ m_{i,j} = 0$ (respectivement $\forall\, i < j,\ \ m_{i,j} = 0$.)
  On note $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.
  Lorsque les cœfficients diagonaux sont également tous nuls, on parle de **matrice triangulaire stricte.**
- On appelle **matrice diagonale** tout matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i \neq j,\ \ m_{i,j} = 0$.
  On note $\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & a_n\end{pmatrix}$.
  On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.
- On appelle **matrice scalaire** toute matrice de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- On dit que $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** lorsque $S^\intercal = S$ ie $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\ \ s_{i,j} = s_{j,i}$. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \{S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid S^\intercal = S\}$.
- On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** lorsque $A^\intercal = -A$ ie $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\ \ a_{j,i} = -a_{i,j}$. On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^\intercal = -A\}$.

Propriété 9 : Sous-algèbres

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives

Propriété 10 : Sous-espaces supplémentaires

$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives

c Trace d'une matrice carrée

Définition 6 : Trace

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A le scalaire $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Propriété 11 : de la trace

(i) ***Linéarité*** *: Si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ *et* $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$.

(ii) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

⚠ $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(BCA) \neq \operatorname{tr}(BAC)$ en général. (Permutations circulaires seulement).

II MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition 7 : Matrice d'une application linéaire

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
  - ⋆ Si $x = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n \in E$, de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, on appelle **matrice de x dans la base $\mathcal{B}$** la matrice colonne

$$X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

  - ⋆ Si $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
    Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ les coordonnées de $\vec{x}_j$ dans la base $\mathcal{B}$ (ie $\vec{x}_j \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$.)
    On appelle **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** la matrice rectangulaire

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = \left(X_1 \,\middle|\, X_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, X_p \right)$$
$$= \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{F}$.

- Si E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = \left(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p\right)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
  On appelle **matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{C}$ à l'arrivée** la matrice rectangulaire

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B})) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_p))$$

On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathcal{C}$ des images par u des vecteurs de $\mathcal{B}$.
Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ ($E = F$: endomorphisme) et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on note

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Propriété 12 : Isomorphisme de représentation matricielle

L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme (d'espaces vectoriels.)*

Propriété 13 : Traduction matricielle de l'évaluation

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Pour tout $\vec{x} \in E$,

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\vec{x})) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}).$$

Autrement dit, $y = u(x)$ se traduit matriciellement par $Y = AX$ avec des notations évidentes.

Propriété 14 : Traduction matricielle de la composée

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$, $n = \dim F$, $q = \dim G$, $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $\mathcal{D}$ une base de G, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(v \circ u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u).$$

Propriété 15 : Isomorphisme de représentation matricielle d'endomorphismes

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.*

2 Application linéaire canoniquement associée

Définition 8 : Application linéaire canoniquement associée

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'unique $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques est A.

Ainsi, écrire $(y_1, \dots, y_n) = u(x_1, \dots, x_p)$ revient à écrire $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Les colonnes de A contiennent les images par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Définition 9 : Noyau, image, rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, u l'application linéaire canoniquement associée à A. On définit l'image, le noyau et le rang de A par :

$\operatorname{Ker} A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ correspondant à $\operatorname{Ker} u = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^p \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{K}^p}\}$

$\operatorname{Im} A = \{AX \; ; \; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$ correspondant à $\operatorname{Im} u = \{u(\vec{x}) \; ; \; \vec{x} \in \mathbb{K}^p\}$.

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} A)$$

Propriété 16 : Lien avec les colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

(i) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ *où $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de A.*

(ii) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p)$.

(iii) ***Formule du rang*** : $\operatorname{rg} A + \dim(\operatorname{Ker} A) = p$.

Propriété 17 : CNS d'inversibilité

Sont équivalentes :

(i) *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible*

(ii) *Son application linéaire canoniquement associée u est un automorphisme*

(iii) $\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(iv) $\operatorname{rg} A = n$

3 Changement de base

Définition 10 : Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E.

On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ dont les colonnes sont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{B}'$.

Autrement dit $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$.

Propriété 18 : Inversibilité

Toute matrice de passage est inversible et $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Propriété 19 : Changement de base d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $\vec{x} \in E$.

Si $X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x})$ et $X' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{x})$, alors

$$\underset{\mathcal{B}}{X} = \underset{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}} \times \underset{\mathcal{B}'}{X'}$$

Propriété 20 : Changement de base pour une application linéaire

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F, $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ et $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathcal{C}', \mathcal{B}'}{A'} = \underset{\mathcal{C}' \to \mathcal{C}}{P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}} \times \underset{\mathcal{C}, \mathcal{B}}{A} \times \underset{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$,

$$A' = Q^{-1} A P \quad ie \quad A = Q A' P^{-1}$$

Corollaire 1 : Changement de base pour un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soient $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathcal{B}'}{A'} = \underset{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}{P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}} \times \underset{\mathcal{B}}{A} \times \underset{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$

$$A' = P^{-1}AP \quad ie \quad A = PA'P^{-1}$$

4 Matrices équivalentes

Définition 11 : Matrices équivalentes

Une matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **équivalente** à une autre matrice B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si on peut trouver $U \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathscr{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = UBV$.

Cela signifie aussi que A et B représentent une même application linéaire.

Cela définit une relation d'équivalence.

Propriété 21 : Transposées de matrices équivalentes

A et B sont équivalentes si et seulement si $A^\intercal$ et $B^\intercal$ le sont.

Théorème 2 : Rang et équivalence avec J_r

Une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Corollaire 2

(i) *Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

(ii) *Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^\intercal)$.*

(iii) *Le rang d'une matrice est celui de la famille de ses vecteurs lignes.*

5 Matrices semblables

Définition 12 : Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite semblable à B lorsqu'on l'on a $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A = PBP^{-1}$$

C'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences s'appellent les classes de similitude.

Propriété 22 : Caractérisation géométrique

$A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme.

Méthode 2

Pour montrer que deux matrices sont semblables, on peut introduire l'endomorphisme canoniquement associé à l'une et chercher une base dans laquelle on obtient l'autre.

Propriété 23 : Calculs avec des matrices semblables

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

(i) $\forall k \in \mathbb{N},\quad A^k = PB^kP^{-1}$

(ii) *A inversible ssi B l'est, et si c'est le cas, la formule précédente est valable dans $\mathbb{Z}$.*

Propriété 24 : La trace est un invariant de similitude

Si A et B sont semblables alors $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. La réciproque est fausse.

Définition 13 : trce d'un endomorphisme

Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle trace de u, notée $\operatorname{tr} u$, la trace de n'importe quelle matrice le représentant.

Propriété 25 : de la trace

tr est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$ et si $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

Propriété 26 : à retenir ! Trace d'un projecteur

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

6 Rang et matrices extraites

Définition 14 : Matrice extraite

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **matrice extraite** ou **sous-matrice** de A toute matrice dont les cœfficients sont les $a_{i,j}$ pour $(i,j) \in I \times J$ avec $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$.

On notera $A|_{I\times J}$ cette matrice, obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de A.

Propriété 27 : Caractérisation du rang

Le rang d'une matrice est l'ordre maximum de ses matrices extraites (carrées) inversibles.

III Opérations élémentaires

Il existe 3 types d'opérations élémentaires :

Les permutations (ou plus exactement transpositions) $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$.

Les transvections $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ avec $k \neq i$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$ avec $k \neq j$.

Les dilations $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ avec $\lambda \neq 0$.

1 Interprétation en termes de produit matriciel

Les opérations élémentaires se traduisent par des multiplications à gauche (pour les lignes) ou à droite (pour les colonnes) par des matrices (carrées) inversibles dont la taille est égale aux nombre de lignes respectivement colonnes correspondantes.

Permutations $L_i \leftrightarrow L_j$ (respectivement $C_i \leftrightarrow C_j$) se traduit par la multiplication à gauche (respectivement à droite) par la **matrice de permutation** (et plus précisément transposition) :

$$P_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & 1 & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ & & & \vdots & & 1 & \vdots & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ (0) & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \quad\uparrow \qquad\qquad \uparrow \\ \quad i^{\mathrm{e}} \qquad\qquad j^{\mathrm{e}} \end{array}$$

$P_{i,j}^2 = I_n$, $P_{i,j}$ inversible et $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$.

Transvections $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ (respectivement $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$) se traduit par la multiplication par une **matrice de transvection** $T_{i,k}(\lambda)$ à gauche (respectivement $T_{k,j}(\lambda)$ à droite : **bien remarquer la logique des indices !**) avec

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \lambda & \cdots & 1 & \\ (0) & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow i^{\mathrm{e}} \\ \uparrow & \\ j^{\mathrm{e}} & \end{array} = I_n + \lambda E_{i,j}$$

$T_{i,j}(\lambda) T_{i,j}(\mu) = T_{i,j}(\lambda + \mu)$ donc $T_{i,j}(\lambda)$ inversible et $\left(T_{i,j}(\lambda)\right)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (respectivement $C_i \leftarrow \lambda C_i$) avec $\lambda \neq 0$ se traduit par la multiplication par une **matrice de dilatation** $D_i(\lambda)$ à gauche (respectivement à droite) avec

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ (0) & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\mathrm{e}}$$

$D_i(\lambda) D_i(\mu) = D_i(\lambda\mu)$ donc $D_i(\lambda)$ inversible et $\left(D_i(\lambda)\right)^{-1} = D_i\left(\lambda^{-1}\right)$.

2 Propriétés des opérations élémentaires

Propriété 28 : des opérations élémentaires

(i) *Une opération élémentaire sur ses lignes ne change pas le noyau d'une matrice.*

(ii) *Une opération élémentaire sur ses colonnes ne change pas l'image d'une matrice.*

(iii) *Une opération élémentaire ne change pas le rang d'une matrice.*

3 Matrices échelonnées

Définition 15 : Matrice échelonnée

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **échelonnée** en lignes (respectivement en colonnes) si chaque ligne (respectivement colonne) débute par un nombre strictement croissant de 0 jusqu'à ce qu'elles soient éventuellement nulles.

Propriété 29 : Toute matrice peut être échelonnée

Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée en lignes (respectivement colonnes) par des opérations élémentaires sur les lignes (respectivement colonnes.)

On applique l'algorithme du pivot de Gauss aux lignes (respectivement colonnes) de la matrice.

4 Application au calcul du rang

On ne change pas le rang par opérations élémentaires. Quelle est le rang d'une matrice échelonnée ?

Propriété 30 : Rang d'une matrice échelonnée

Le rang d'une matrice échelonnée en lignes (respectivement colonnes) est le nombre de lignes (respectivement colonnes) non nulles.

5 Application à l'inversion de matrice

Propriété 31

Par des opérations élémentaires sur des lignes (respectivement des colonnes), on peut transformer une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ en I_n.

On en déduit la méthode d'inversion de matrice par opérations **exclusivement** sur les lignes ou les colonnes de A.
• Sur les lignes : $P_kP_{k-1}\cdots P_1A = I_n \Longrightarrow A^{-1} = P_kP_{k-1}\cdots P_1I_n$.
• Sur les colonnes : $AQ_1Q_2\cdots Q_k = I_n \Longrightarrow A^{-1} = I_nQ_1Q_2\cdots Q_k$.

6 Systèmes linéaires

a Traductions d'un système linéaire

On considère un système linéaire de n équations à p inconnues dans $\mathbb{K}$:

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right.$$

On rappelle que la matrice du système linéaire est définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et la matrice augmentée est

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$$

Interprétations :

- **Matricielle** : si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $\boxed{(S) \iff A\vec{x} = \vec{b}}$
- **Équation linéaire** : si u est l'application linéaire canoniquement associée à A,

$$\boxed{(S) \iff u(\vec{x}) = \vec{b} \iff \vec{x} \in u^{-1}\left(\left\{\vec{b}\right\}\right)}$$

- **Formes linéaires** : Soit pour $i \in [\![1,n]\!]$ φ_i la forme linéaire de $\mathbb{K}^p$ correspondant à la i^e (canoniquement associée à la i^e ligne de A) :

$$\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p \end{array}\right.$$

alors $\boxed{(S) \iff \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \ \varphi_i(\vec{x}) = b_i \iff \vec{x} \in \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} \varphi_i^{-1}(\{b_i\})}$

b Espace des solutions

Définition 16 : Rang d'un système

On appelle **rang** du système (S) le nombre $r = \operatorname{rg} S = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u \leqslant \min(n,p)$.

Propriété 32 : Structure de l'espace des solutions du système homogène

L'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions du système homogène (H) associé à (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $\dim \mathscr{S}_H = p - \operatorname{rg} S$.

Propriété 33 : Structure de l'espace des solutions du système complet

L'ensemble des solution $\mathscr{S}_S$ est soit vide, soit de la forme $\mathscr{S}_S = \vec{x}_0 + \mathscr{S}_H$ où $\vec{x}_0 \in \mathbb{K}^p$ est une solution particulière. C'est donc un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de direction $\mathscr{S}_H$.

*Lorsque $\mathscr{S}_S = \varnothing$, le système est dit **incompatible**. Sinon il est **compatible**.*

Propriété 34

*(i) Le système est dit de **Cramer** lorsque $n = p = \operatorname{rg}(S)$ ie A inversible.*
Alors pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, il y a une unique solution.

(ii) Si $\operatorname{rg} S = n$, le système a au moins une solution.

(iii) Si $\operatorname{rg} S = p$, le système a au plus une solution.

L'algorithme du pivot de Gauss appliqué aux systèmes a été présenté dans un chapitre de début de d'année : appliqué aux lignes de la matrice augmentée pour la rendre échelonnée en lignes (à permutation éventuelle des inconnues près), il permet d'obtenir un système équivalent

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} p_1 x_{i_1} + \quad \cdots & = \quad b'_1 \\ \qquad p_2 x_{i_2} + \quad \cdots & = \quad b'_2 \\ & \vdots \\ \qquad\qquad p_r x_{i_r} + \quad \cdots & = \quad b'_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 & = \quad b'_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad \vdots & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & = \quad b'_n \end{cases}$$

où $r = \mathrm{rg}(S)$, $i_1 < \ldots < i_r$, $p_1, \ldots, p_r$ non nuls, les $n-r$ dernières équations sont les **équations de compatibilité**, elle permettent de savoir si $\mathscr{S}_S = \varnothing$.

On tire successivement x_{i_r}, puis $x_{i_{r-1}}$ jusqu'à x_{i_1} en fonction des autres inconnues. On retrouve la dimension $n-r$.