6
Calcul matriciel

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Compléments d'algèbre linéaire	
Matrices définies par blocs.	Interprétation géométrique des blocs.
Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible.

Table des matières

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.
Sauf mention contraire, n, p, q, r, s désignent des entiers naturels non nuls.

I Calcul matriciel

1 Espaces de matrices

Propriété 1 : Espace vectoriel de matrices

(i) $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *a une structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, d'élément nul* $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

Remarque

R 1 – $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ (et non $n!$)

Définition 1 : Base canonique

On appelle **base canonique** $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,p})$ où

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \uparrow & \\ j & \end{array}$$

$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$ s'écrit de manière unique $\sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$.

Propriété 2 : Cœfficients des matrices élémentaires

$\forall\, i,k \in [\![1,n]\!],\ \ \forall\, j,\ell \in [\![1,p]\!],\ \ (E_{i,j})_{k,\ell} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$.

Définition 2 : Produit matriciel

On définit

$$\times : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \longmapsto & C = A \times B \end{array} \right.$$

avec $\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \ \forall\, j \in [\![1,q]\!],\ \ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$.

Remarque

R2 – Si $L_1, \dots, L_n$ sont les lignes de A et $C_1, \dots, C_q$ les colonnes de B :
- $c_{i,j} = L_i \times C_j$.
- Les lignes de $A \times B$ sont $L_1 \times B, \dots, L_n \times B$.
- Les colonnes de $A \times B$ sont $A \times C_1, \dots, A \times C_q$.

R3 – On retiendra que la multiplication à gauche agit sur les lignes, et la multiplication à droite sur les colonnes (comme les indices).

R4 – ⚠ Il faut que les tailles soient compatibles pour multiplier des matrices.
Même si les matrices sont carrées, **le produit n'est pas commutatif** (sauf si $n = 1$!).

Propriété 3 : Bilinéarité, associativité, neutre

(i) ***Associativité*** : *Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

(ii) ***Bilinéarité*** : *Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $A \mapsto A \times B$ *et* $B \mapsto A \times B$ *sont linéaires.*

(iii) ***Neutre*** : *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \times I_p = I_n \times A = A$.

Démonstration

(i)

$$\begin{aligned} [A \times (B \times C)]_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} [B \times C]_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \left(\sum_{\ell=1}^{q} b_{k,\ell} c_{\ell,j} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,\ell} \right) c_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{q} [A \times B]_{i,\ell} c_{\ell,j} \\ &= [(A \times B) \times C]_{i,j} \end{aligned}$$

(ii)

$$[(A + \lambda A') \times B]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} (a_{i,k} + \lambda a'_{i,k}) b_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} + \lambda \sum_{k=1}^{p} a'_{i,k} b_{k,j} = [A \times B + \lambda A' \times B]_{i,j}.$$

idem à droite.
(iii) Multiplication par une matrice diagonale. ■

Propriété 4 : $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$

Lorsque les tailles sont compatibles,

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$$

Remarque

R5 – ⚠ Les différentes $E_{\circ,\circ}$ ne vivent pas dans les mêmes espaces de matrices (ne sont pas de mêmes tailles.)

Démonstration

- **Première méthode** : poser le produit.
- **Deuxième méthode** : N étant le nombre de colonnes de $E_{i,j}$ et de lignes de $E_{k,\ell}$,

$$\begin{aligned}[E_{i,j} \times E_{k,\ell}]_{p,q} &= \sum_{m=1}^{N} [E_{i,j}]_{p,m} [E_{k,\ell}]_{m,q} = \sum_{m=1}^{N} \delta_{i,p}\delta_{j,m}\delta_{k,m}\delta_{\ell,q} = \left(\sum_{m=1}^{N} \delta_{j,m}\delta_{k,m}\right)\delta_{i,p}\delta_{\ell,q} \\ &= \left(\sum_{m=1}^{N} \delta_{j,m}\delta_{k,m}\right)[E_{i,\ell}]_{p,q}\end{aligned}$$

avec $\sum_{m=1}^{N} \delta_{j,m}\delta_{k,m} = 0$ si $j \neq k$ et 1 si $j = k$. D'où le résultat. ■

Théorème 1 : Produit par blocs

Soit les matrices par blocs $M = \begin{array}{cc} \overset{p}{\leftrightarrow} & \overset{q}{\leftrightarrow} \end{array} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow n \\ \updownarrow m \end{array}$ *et* $N = \begin{array}{cc} \overset{r}{\leftrightarrow} & \overset{s}{\leftrightarrow} \end{array} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array}$ *où* A, B, C, D, E, F, G, H *sont des matrices de format correspondant. Alors*

$$M \times N = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m,r+s}(\mathbb{K}).$$

2 Transposition

Définition 3 : Transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice $A^{\top} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad \left(A^{\top}\right)_{i,j} = (A)_{j,i}$$

Remarque

R6 – ${}^tA$ notation française. $A^{\top}$ notation anglo-saxonne, donc internationale.

Propriété 5 : de la transposition

Soit $T : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array} \right.$

(*i*) ***Linéarité*** : *Si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top \quad \text{et} \quad (\lambda A)^\top = \lambda A^\top$$

(*ii*) T *est* ***involutif*** : *si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$.

(*iii*) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A \times B)^\top = B^\top \times A^\top$.

3 Matrices carrées

a La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Propriété 6 : Algèbre des matrices carrées

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ *est un anneau, ni commutatif ni intègre dès que* $n \geqslant 2$, *d'élément unité* I_n. *Ainsi,* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ *est une* K*-algèbre de dimension* n^2.

Démonstration

- $\mathbb{K}$-espace vectoriel : ok.
- Anneau :
  - ⋆ $(\mathcal{M}_n(K), +)$ est un groupe abélien.
  - ⋆ $\times$ est une lci sur $\mathcal{M}_n(K)$.
  - ⋆ $\times$ est associative.
  - ⋆ $\times$ est distributive sur $+$ (par bilinéarité).
  - ⋆ I_n est neutre pour $\times$.
- Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda(M \times N) = (\lambda M) \times N = M \times (\lambda N)$ par bilinéarité.
- $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & & \\ & (0) & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & & \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & \\ & (0) & \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & & \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & & \\ & (0) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 \\ & & \\ & (0) & \end{pmatrix}$ non commutatif.
- $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & & 1 \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix}$ non intègre. ■

Propriété 7 : Formules du Binôme et $A^m - B^m$

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tels que* $\boxed{A \times B = B \times A}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$$A^m - B^m = (A-B)\left(A^{m-1} + A^{m-2}B + \dots + AB^{m-2} + B^{m-1}\right)$$

Définition 4 : Groupe linéaire

On appelle **groupe linéaire** le groupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ des inversible de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Propriété 8

(i) $(\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ *est un groupe.*

(ii) *Si* $A, B \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$*,* $A \times B \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

(iii) *Si* $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$*,* $A^{-1} \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(iv) *Sont équivalentes :*

- A *est inversible*
- A *est inversible à gauche*
- A *est inversible à droite*
- *les colonnes de* A *forment une famille libre*
- *les lignes de* A *forment une famille libre*

(v) *Si* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ *et* $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$*,* $\lambda A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.

(vi) $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ *si et seulement si* $A^{\mathsf{T}} \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ *et dans ce cas* $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathsf{T}}$

Démonstration

(i) Groupe des inversibles.
(ii), (iii) et (v) Facile voire connu.
(iv) Admis provisoirement.

Méthode 1 : Calcul pratique

Pour démontrer l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse, on peut :

- Résoudre le système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: il admet une unique solution si et seulement si A est inversible et alors on obtient $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
- Effectuer des opérations élémentaires (pivot de Gauss) :
  - ⋆ soit exclusivement sur les lignes,
  - ⋆ soit exclusivement sur les colonnes,

  se ramener à I_n et effectuer les mêmes opérations simultanément en partant de I_n qui va devenir A^{-1} si A est inversible.
- Reconnaître une matrice de passage (cf plus loin).
- Utiliser la formule de la comatrice si $n = 2$ ou 3 (voir déterminant).

b Matrices carrées particulières

Définition 5 : Matrices triangulaires, diagonales, scalaires

- On appelle **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) tout matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i > j,\ \ m_{i,j} = 0$ (respectivement $\forall\, i < j,\ \ m_{i,j} = 0$.)
  On note $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.
  Lorsque les cœfficients diagonaux sont également tous nuls, on parle de **matrice triangulaire stricte.**

- On appelle **matrice diagonale** tout matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i \neq j,\ \ m_{i,j} = 0$.
  On note $\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$.
  On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.
- On appelle **matrice scalaire** toute matrice de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- On dit que $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** lorsque $S^{\mathsf{T}} = S$ ie $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!]$, $s_{i,j} = s_{j,i}$. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \{S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid S^{\mathsf{T}} = S\}$.
- On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** lorsque $A^{\mathsf{T}} = -A$ ie $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{j,i} = -a_{i,j}$. On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^{\mathsf{T}} = -A\}$.

Remarque

R7 – La diagonale d'une matrice antisymétrique est nécessairement nulle.

Propriété 9 : Sous-algèbres

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives

Remarque

R8 – Si $0 \leqslant \ell \leqslant n$, $\begin{pmatrix} 0 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}^{\ell} = \begin{array}{c} \leftarrow \ell \rightarrow \qquad\qquad \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & & (\star) \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 \\ & (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Idem avec les matrices triangulaires inférieures strictes.

Propriété 10 : Sous-espaces supplémentaires

$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives

Démonstration

- **Preuve 1** : $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des parties non vides de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ stables par combinaisons linéaires, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  - ⋆ **Analyse** : Si $M = S + A$ avec des notations évidentes, $M^\top = S - A$ donc $S = \frac{1}{2}(M + M^\top)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^\top)$.
  - ⋆ **Synthèse** : On a bien $M = \frac{1}{2}(M+M^\top) + \frac{1}{2}(M - M^\top)$, $\left(\frac{1}{2}(M+M^\top)\right)^\top = \frac{1}{2}(M+M^\top)$ et $\left(\frac{1}{2}(M-M^\top)\right)^\top = -\frac{1}{2}(M-M^\top)$.

  D'où l'existence et l'unicité.
- **Preuve 2** :
  - ⋆ $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\{E_{i,i}\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{E_{i,j} + E_{j,i}\ ;\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}\right)$, la famille correspondante étant facilement libre, donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
  - ⋆ $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(E_{i,j} - E_{j,i}\right)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$, la famille correspondante étant facilement libre, donc $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
  - ⋆ Ainsi $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) + \dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
  - ⋆ De plus, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}\}$

■

Remarque

R9 – L'inverse d'une matrice (inversible) (anti)symétrique l'est encore, mais c'est faux pour le produit en général.

C Trace d'une matrice carrée

Définition 6 : Trace

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A le scalaire $\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Propriété 11 : de la trace

(i) ***Linéarité*** *: Si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ *et* $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$.

(ii) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

⚠ $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(BCA) \neq \operatorname{tr}(BAC)$ en général. (Permutations circulaires seulement).

Exemple

E 1 – $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II Matrices et applications linéaires

1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition 7 : Matrice d'une application linéaire

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
  - ⋆ Si $x = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n \in E$, de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, on appelle **matrice de x dans la base $\mathcal{B}$** la matrice colonne
  $$X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$
  - ⋆ Si $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E.
  Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ les coordonnées de $\vec{x}_j$ dans la base $\mathcal{B}$ (ie $\vec{x}_j \underset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$.)
  On appelle **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** la matrice rectangulaire
  $$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & \dots & X_p \end{array} \right)$$
  $$= \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
  On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{F}$.
- Si E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = \left(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p\right)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
  On appelle **matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{C}$ à l'arrivée** la matrice rectangulaire
  $$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B})) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_p))$$
  On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathcal{C}$ des images par u des vecteurs de $\mathcal{B}$.
  Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ ($E = F$: endomorphisme) et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on note
  $$A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Propriété 12 : Isomorphisme de représentation matricielle

L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme (d'espaces vectoriels.)*

Remarque

R 10 – On retrouve que $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F$.

Propriété 13 : Traduction matricielle de l'évaluation

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Pour tout $\vec{x} \in E$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(\vec{x})) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{x}).$$

Autrement dit, $y = u(x)$ se traduit matriciellement par $Y = AX$ avec des notations évidentes.

Propriété 14 : Traduction matricielle de la composée

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$, $n = \dim F$, $q = \dim G$, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F, $\mathscr{D}$ une base de G, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u).$$

et donc

Propriété 15 : Isomorphisme de représentation matricielle d'endomorphismes

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}$ une base de E. Alors $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \end{array}\right.$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

2 Application linéaire canoniquement associée

Définition 8 : Application linéaire canoniquement associée

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'unique $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques est A.

Ainsi, écrire $(y_1, \dots, y_n) = u(x_1, \dots, x_p)$ revient à écrire $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Les colonnes de A contiennent les images par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Exemple

E 2 – $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.

Application linéaire canoniquement associée : $u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 4x+5y+6z) \end{array}\right.$

Définition 9 : Noyau, image, rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, u l'application linéaire canoniquement associée à A. On définit l'image, le noyau et le rang de A par :

$\operatorname{Ker} A = \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ correspondant à $\operatorname{Ker} u = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^p \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{K}^p}\}$

$\operatorname{Im} A = \{AX \; ; \; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$ correspondant à $\operatorname{Im} u = \{u(\vec{x}) \; ; \; \vec{x} \in \mathbb{K}^p\}$.

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} A)$$

Propriété 16 : Lien avec les colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

(*i*) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ *où* $C_1, \dots, C_p$ *sont les colonnes de* A.

(*ii*) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p)$.

(*iii*) ***Formule du rang*** : $\operatorname{rg} A + \dim(\operatorname{Ker} A) = p$.

Propriété 17 : CNS d'inversibilité

Sont équivalentes :

(*i*) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est inversible*

(*ii*) *Son application linéaire canoniquement associée* u *est un automorphisme*

(*iii*) $\operatorname{Ker} A = \left\{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\}$

(*iv*) $\operatorname{rg} A = n$

3 Changement de base

Définition 10 : Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ dont les colonnes sont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{B}'$.
Autrement dit $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\operatorname{id}_E)$.

Propriété 18 : Inversibilité

Toute matrice de passage est inversible et $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Remarque

R 11 – La réciproque est vraie : toute matrice inversible est une matrice de passage.

R 12 – On en déduit une nouvelle méthode d'inversion de matrice : $A = \begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \vec{e}_3\,') = u(\mathcal{B})$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \vec{e}_1\,' &=& \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2\,' &=& 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\,' &=& 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \vec{e}_1 &=& -\vec{e}_1\,' + 2\vec{e}_2\,' - \vec{e}_3\,' \\ \vec{e}_2 &=& 2\vec{e}_1\,' - 2\vec{e}_2\,' + \vec{e}_3\,' \\ \vec{e}_3 &=& -\vec{e}_2\,' + \vec{e}_3\,' \end{array}\right.$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix}-1&2&0\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

Propriété 19 : Changement de base d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\vec{x}\in E$.
Si $X=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\vec{x})$ et $X'=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\vec{x})$, alors

$$\underset{\mathscr{B}}{X} = \underset{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}} \times \underset{\mathscr{B}'}{X'}$$

Propriété 20 : Changement de base pour une application linéaire

Soient E,F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C},\mathscr{C}'$ deux bases de F, $u\in\mathscr{L}(E,F)$.
Soient $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $A'=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}{A'} = \underset{\mathscr{C}'\to\mathscr{C}}{P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}}} \times \underset{\mathscr{C},\mathscr{B}}{A} \times \underset{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q=P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$,

$$A'=Q^{-1}AP \quad ie \quad A=QA'P^{-1}$$

Corollaire 1 : Changement de base pour un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ deux bases de E, $u\in\mathscr{L}(E)$.
Soient $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A'=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathscr{B}'}{A'} = \underset{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}{P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}} \times \underset{\mathscr{B}}{A} \times \underset{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P=P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$

$$A'=P^{-1}AP \quad ie \quad A=PA'P^{-1}$$

4 Matrices équivalentes

Définition 11 : Matrices équivalentes

Une matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **équivalente** à une autre matrice B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si on peut trouver $U\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V\in\mathscr{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A=UBV$.
Cela signifie aussi que A et B représentent une même application linéaire.

Cela définit une relation d'équivalence.

Propriété 21

A et B sont équivalentes si et seulement si $A^{\intercal}$ et $B^{\intercal}$ le sont.

Théorème 2 : Rang ét équivalence avec J_r

Une matrice $A\in\mathscr{M}_{n,p}(K)$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_r=\begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r,p-r}\end{pmatrix}$.

Remarque

R 13 – Par opérations élémentaires, on peut passer de A à J_r.
Les opérations sur les lignes se traduisent par la multiplication à gauche par des matrices inversibles, les opérations sur les colonnes se traduisent par la multiplication à droite par des matrices inversibles. On obtient alors explicitement U et V inversibles telles que $UAV = J_r$.

Corollaire 2

(*i*) *Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

(*ii*) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^\top)$.

(*iii*) *Le rang d'une matrice est celui de la famille de ses vecteurs lignes.*

5 Matrices semblables

Définition 12 : Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite semblable à B lorsqu'on l'on a $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A = PBP^{-1}$$

C'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences s'appellent les classes de similitude.

Remarque

R 14 – Des matrices semblables sont équivalentes, mais la réciproque est fausse.
En particulier, des matrices semblables ont même rang.

Propriété 22

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme.*

Méthode 2

Pour montrer que deux matrices sont semblables, on peut introduire l'endomorphisme canoniquement associé à l'une et chercher une base dans laquelle on obtient l'autre.

Propriété 23 : Calculs avec des matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $A = PBP^{-1}$.

(*i*) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PB^kP^{-1}$

(*ii*) A *inversible ssi* B *l'est, et si c'est le cas, la formule précédente est valable dans* $\mathbb{Z}$.

Propriété 24 : La trace est un invariant de similitude

Si A *et* B *sont semblables alors* $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. *La réciproque est fausse.*

Définition 13 : trce d'un endomorphisme

Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle trace de u, notée $\operatorname{tr} u$, la trace de n'importe quelle matrice le représentant.

Propriété 25 : de la trace

tr *est une forme linéaire sur* $\mathscr{L}(E)$ *et si* $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

Propriété 26 : à retenir ! Trace d'un projecteur

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \dots, p_m$ des projecteurs de E dont la somme vaut id_E. On note $F_1, \dots, F_m$ les images de $p_1, \dots, p_m$. Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k$.

6 Rang et matrices extraites

Définition 14 : Matrice extraite

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **matrice extraite** ou **sous-matrice** de A toute matrice dont les cœfficients sont les $a_{i,j}$ pour $(i,j) \in I \times J$ avec $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$.

On notera $A|_{I \times J}$ cette matrice, obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de A.

Propriété 27 : Caractérisation du rang

Le rang d'une matrice est l'ordre maximum de ses matrices extraites (*carrées*) *inversibles.*

III OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Il existe 3 types d'opérations élémentaires :

Les permutations (ou plus exactement transpositions) $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$.

Les transvections $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ avec $k \neq i$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$ avec $k \neq j$.

Les dilations $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ avec $\lambda \neq 0$.

1 Interprétation en termes de produit matriciel

Les opérations élémentaires se traduisent par des multiplications à gauche (pour les lignes) ou à droite (pour les colonnes) par des matrices (carrées) inversibles dont la taille est égale aux nombre de lignes respectivement colonnes correspondantes.

Permutations $L_i \leftrightarrow L_j$ (respectivement $C_i \leftrightarrow C_j$) se traduit par la multiplication à gauche (respectivement à droite) par la **matrice de permutation** (et plus précisément transposition) :

$$P_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&& (0) & \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\
&&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\
&&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
& (0) &&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \qquad\qquad & \uparrow \\ i^{\text{e}} & & j^{\text{e}} \end{matrix} \end{array}$$

$P_{i,j}^2 = I_n$, $P_{i,j}$ inversible et $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$.

Transvections $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ (respectivement $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$) se traduit par la multiplication par une **matrice de transvection** $T_{i,k}(\lambda)$ à gauche (respectivement $T_{k,j}(\lambda)$ à droite : **bien remarquer la logique des indices !**) avec

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&& (0) && \\
&& 1 &&&& \\
&& \vdots & \ddots &&& \\
&& \lambda & \cdots & 1 && \\
& (0) &&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix} \\ \uparrow \\ j^{\text{e}} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \quad i^{\text{e}} \\ \\ \\ \end{array} = I_n + \lambda E_{i,j}$$

$T_{i,j}(\lambda) T_{i,j}(\mu) = T_{i,j}(\lambda + \mu)$ donc $T_{i,j}(\lambda)$ inversible et $\left(T_{i,j}(\lambda)\right)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (respectivement $C_i \leftarrow \lambda C_i$) avec $\lambda \neq 0$ se traduit par la multiplication par une **matrice de dilatation** $D_i(\lambda)$ à gauche (respectivement à droite) avec

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&& (0) && \\
&& 1 &&&& \\
&&& \lambda &&& \\
&&&& 1 && \\
& (0) &&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \quad i^{\text{e}} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$D_i(\lambda) D_i(\mu) = D_i(\lambda\mu)$ donc $D_i(\lambda)$ inversible et $(D_i(\lambda))^{-1} = D_i\left(\lambda^{-1}\right)$.

2 Propriétés des opérations élémentaires

Propriété 28 : des opérations élémentaires

(i) Une opération élémentaire sur ses lignes ne change pas le noyau d'une matrice.

(ii) Une opération élémentaire sur ses colonnes ne change pas l'image d'une matrice.

(iii) Une opération élémentaire ne change pas le rang d'une matrice.

Démonstration

(i) Si P inversible, $AX = 0 \Longleftrightarrow (PA)X = 0$.

(ii) Si P inversible, $AX = (AP)(P^{-1}X)$ et $(AP)X = A(PX)$.

(iii) Une opération élémentaire donne une matrice équivalente. ∎

3 Matrices échelonnées

Définition 15 : Matrice échelonnée

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **echelonnée** en lignes (respectivement en colonnes) si chaque ligne (respectivement colonne) débute par un nombre strictement croissant de 0 jusqu'à ce qu'elles soient éventuellement nulles.

Remarque

R 15 – Si elle est carrée, elle est nécessairement triangulaire supérieure (respectivement inférieure).

R 16 – Si une ligne (respectivement colonne) est nulle, les suivantes le sont aussi.

Exemple

E 3 – $A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes. $2, 3, -4, 6$ sont appelés **pivots**.

E 4 – $B = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en colonnes. $-1, -1$ sont les pivots.

E 5 – $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée en lignes (même si elle est triangulaire).

Propriété 29

Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée en lignes (respectivement colonnes) par des opérations élémentaires sur les lignes (respectivement colonnes.)

On applique l'algorithme du pivot de Gauss aux lignes (respectivement colonnes) de la matrice.

Démonstration

1. Si la matrice est nulle, elle est échelonnée.
2. Sinon, soit j_0 le numéro de la première colonne non nulle au moins un de ses cœfficients n'est pas nul, disons $a_{i_0, j_0} = p \neq 0$, ce sera un pivot : le mettre dans la première ligne grâce à $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$.
3. On annule ensuite tous les cœfficients de la première colonne avec les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{p} L_1$. On obtient une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \dots & 0 & \boxed{p} & * \quad \dots \quad * \\ \cline{5-5} \vdots & & \vdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & A' \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

4. On recommence alors à l'étape 1 avec A', ce qui revient à agir sur les $n-1$ dernière lignes. Les opérations sur ces lignes ne changent pas la première. ■

4 Application au calcul du rang

On ne change pas le rang par opérations élémentaires. Quelle est le rang d'une matrice échelonnée ?

Propriété 30 : Rang d'une matrice échelonnée

Le rang d'une matrice échelonnée en lignes (respectivement colonnes) est le nombre de lignes (respectivement colonnes) non nulles.

Démonstration

Sur les colonnes, si $C_{r+1},\dots,C_p$ sont les colonnes nulles, alors $C_1,\dots,C_r$ sont facilement libres grâce aux pivots et le rang vaut r. ■

5 Application à l'inversion de matrice

Propriété 31

Par des opérations élémentaires sur des lignes (respectivement des colonnes), on peut transformer une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en I_n.

Démonstration

Sur les lignes, par exemple. Par pivot de Gauss, on se ramène à une matrice échelonnée en lignes, donc triangulaire supérieure, et inversible donc les cœfficients diagonaux sont tous non nuls :

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Par $L_i \leftarrow \frac{1}{m_{i,i}} L_i$, on obtient :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

puis par $\forall\, i = 1 \dots n-1,\ \ L_i \leftarrow L_i - m'_{i,n} L_n$, on arrive à

$$M'' = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M'_1 & & \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Où M'_1 a la même forme que M'. Il suffit de ré-appliquer l'étape suivante à M'_1, par récurrence (finie.) ■

On en déduit la méthode d'inversion de matrice par opérations **exclusivement** sur les lignes ou les colonnes de A.

- Sur les lignes : $P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = I_n \Longrightarrow A^{-1} = P_k P_{k-1} \cdots P_1 I_n$.
- Sur les colonnes : $A Q_1 Q_2 \cdots Q_k = I_n \Longrightarrow A^{-1} = I_n Q_1 Q_2 \cdots Q_k$.

6 Systèmes linéaires

a Traductions d'un système linéaire

On considère un système linéaire de n équations à p inconnues dans $\mathbb{K}$:

$$(S)\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On rappelle que la matrice du système linéaire est définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et la matrice augmentée est

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$$

Interprétations :

- **Matricielle** : si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $\boxed{(S) \iff A\vec{x} = \vec{b}}$
- **Équation linéaire** : si u est l'application linéaire canoniquement associée à A,

$$\boxed{(S) \iff u(\vec{x}) = \vec{b} \iff \vec{x} \in u^{-1}\left(\left\{\vec{b}\right\}\right)}$$

- **Formes linéaires** : Soit pour $i \in [\![1,n]\!]$ φ_i la forme linéaire de $\mathbb{K}^p$ correspondant à la i^{e} (canoniquement associée à la i^{e} ligne de A) :

$$\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p \end{array} \right.$$

alors $\boxed{(S) \iff \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \ \varphi_i(\vec{x}) = b_i \iff \vec{x} \in \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} \varphi_i^{-1}(\{b_i\})}$

b Espace des solutions

Définition 16 : Rang d'un système

On appelle **rang** du système (S) le nombre $r = \operatorname{rg} S = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u \leqslant \min(n,p)$.

Propriété 32 : Structure de l'espace des solutions du système homogène

L'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions du système homogène (H) associé à (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $\dim \mathscr{S}_H = p - \operatorname{rg} S$.

Démonstration

$\mathscr{S}_H = \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} A$. ■

Propriété 33 : Structure de l'espace des solutions du système complet

L'ensemble des solution $\mathscr{S}_S$ est soit vide, soit de la forme $\mathscr{S}_S = \vec{x}_0 + \mathscr{S}_H$ où $\vec{x}_0 \in \mathbb{K}^p$ est une solution particulière. C'est donc un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de direction $\mathscr{S}_H$.

*Lorsque $\mathscr{S}_S = \varnothing$, le système est dit **incompatible**. Sinon il est **compatible**.*

Démonstration

C'est une équation linéaire $u(\vec{x}) = \vec{b}$. ■

Propriété 34

*(i) Le système est dit de **Cramer** lorsque $n = p = \text{rg}(S)$ ie A inversible.*
Alors pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, il y a une unique solution.

(ii) Si $\text{rg}\, S = n$, le système a au moins une solution.

(iii) Si $\text{rg}\, S = p$, le système a au plus une solution.

Démonstration

(ii) $\text{Im}\, u = \mathbb{K}^n$ donc u est surjective.

(iii) $\dim \text{Ker}\, u = p - r = 0$ donc $\mathscr{S}_S = \varnothing$ ou $\mathscr{S}_S = \left\{x^{(0)}\right\}$. ■

L'algorithme du pivot de Gauss appliqué aux systèmes a été présenté dans un chapitre de début d'année : appliqué aux lignes de la matrice augmentée pour la rendre échelonnée en lignes (à permutation éventuelle des inconnues près), il permet d'obtenir un système équivalent

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} p_1 x_{i_1} + & \cdots & & & & = & b'_1 \\ & p_2 x_{i_2} + & \cdots & & & = & b'_2 \\ & & & & & \vdots & \\ & & p_r x_{i_r} + & & \cdots & = & b'_r \\ & & & & 0 & = & b'_{r+1} \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & 0 & = & b'_n \end{array}\right.$$

où $r = \text{rg}(S)$, $i_1 < \ldots < i_r$, $p_1, \ldots, p_r$ non nuls, les $n - r$ dernières équations sont les **équations de compatibilité**, elle permettent de savoir si $\mathscr{S}_S = \varnothing$.

On tire successivement x_{i_r}, puis $x_{i_{r-1}}$ jusqu'à x_{i_1} en fonction des autres inconnues. On retrouve la dimension $n - r$.