Suites et séries de fonctions (1^{re} partie)

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, X une partie non vide $\mathbb{R}$.

I Convergences simple et uniforme

1 Convergence simple

Définition 1 : Convergence simple

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.

On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur** X **vers** f lorsque pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$.

2 Convergence uniforme

a Définition

Définition 2 : Convergence uniforme

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.

On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur** X **vers** f lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de x. Autrement dit lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ \forall x \in X,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$.

Propriété 1 : CU ⇒ CS

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Propriété 2 : CU par majoration uniforme

S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

- **H1** $\alpha_n \to 0$
- **H2** *pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$, $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \alpha_n$ (majoration **uniforme**, c'est-à-dire que α_n ne dépend pas de $x \in X$),*

alors

- **C1** *(f_n) converge uniformément vers f.*

Propriété 3 : Transmission du caractère borné par CU

On suppose que

- **H1** *les f_n sont bornées*
- **H2** *elles convergent uniformément vers f*

alors

- **C1** *f est bornée.*

b Norme infinie

Définition 3 : Norme

On appelle **norme** sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

Défini-positivité : Pour tout $x \in E$, $N(x) \geqslant 0$ et $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$.

Homogénéité : Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) : Pour tout $x, y \in E$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Propriété 4 : Utilisable directement

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$, alors $\sup(kA) = k\sup(A)$.

Définition 4 : Norme infinie

On définit, pour $f \in E = \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \left|f(x)\right|.$$

Propriété 5 : La norme infinie est une norme

Il s'agit d'une norme sur $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$.

c Lien avec la convergence uniforme

Propriété 6 : CU et norme infinie

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ si et seulement si à partir d'un certain rang les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur X et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Propriété 7 : Cas des fonctions bornées

Si les fonctions $f_n : X \to \mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$ sont bornées, alors

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Propriété 8 : Non convergence uniforme

Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$ et s'il existe $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$, alors la convergence n'est pas uniforme.

Méthode 1 : Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$

- On étudie la convergence simple et on note f la limite.
- Puis pour prouver qu'il y a convergence uniforme :
  - ⋆ Soit on cherche à déterminer $\|f_n - f\|_\infty$ par exemple en étudiant les variations, puis on montre que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
  - ⋆ Soit on majore uniformément les $|f_n(x) - f(x)|$, c'est-à-dire qu'on cherche $\alpha_n \to 0$ indépendant de x tel que $\forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$.
- Ou, pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme :
  - ⋆ Soit les $(f_n)_n$ sont bornées mais pas f.
  - ⋆ Soit trouver $(x_n)_n$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$.

3 Convergence uniforme locale

On suppose que X est une réunion d'intervalles.

Propriété 9 : CU sur tout segment ⇒ au v. de chaque point de X

Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans X, alors elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X.

II Continuité et limite

1 Continuité

Théorème 1 : Limite uniforme de fonctions continues en un point

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $x_0 \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue en x_0.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de x_0.*

Alors

C1 *f est continue en x_0.*

Corollaire 1 : Limite uniforme de fonctions continues sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue sur I.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de chaque point de I (donc sur tout segment inclus dans I suffit).*

Alors

C1 *f est continue sur I.*

Méthode 2 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit que les f_n soient continues mais pas f.

2 Théorème de la double limite

Théorème 2 : de la double limite

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.*

Alors on a $b \in \mathbb{K}$ tel que

C1 $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$

C2 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$

Autrement dit, les limites existant bien :

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Méthode 3 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit d'avoir a tel qu'on n'ait pas $\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$ alors que ces limites existent.

III Approximations uniformes

1 Par des polynômes

Théorème 3 : de Weierstraß

On donne trois énoncés équivalents :

- *Toute fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.*
- *Soit f continue sur le segment $[a,b]$. Il existe une suite fonction $(p_n)_n$ de fonctions polynomiales telle que $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ sur $[a,b]$, c'est-à-dire $\|p_n - f\|_\infty \to 0$.*
- *Soit f continue sur le segment $[a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p telle que $\|p - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

2 Par des fonctions en escalier

Théorème 4 : Approximation uniforme d'une fonction CPM sur un segment par des fonctions en escalier

Toute fonction continue par morceau sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

IV Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^X$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, la somme partielle au rang n de la série de fonctions $\sum f_n$.

On souhaite étudier la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en étudiant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sur le même schéma que les séries numériques.)

1 Convergence simple

Définition 5 : Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** X si pour tout $x \in X$, la série $\sum f_n(x)$ converge.Lorsque c'est le cas,

- $f : x \in X \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$ et est notée $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $R_n = f - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$.

2 Convergence uniforme

Définition 6 : Convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur X lorsque la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur X, c'est-à-dire lorsqu'il existe $f : X \to \mathbb{K}$ tel que

- à partir d'un certain rang, $S_n - f$ bornée sur X,
- $\|S_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Propriété 10 : CS ⇒ CU

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur X vers f, alors elle converge simplement vers f.

Propriété 11 : CU par majoration uniforme

Si on a une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que

H1 $\alpha_n \to 0$

H2 $\forall x \in X, \quad |S_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$ *au moins à partir d'un certain rang*

alors

C1 $\sum f_n$ *converge uniformément sur* X *vers* f.

Propriété 12 : CU par CU des restes vers la fonction nulle

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant simplement sur X, R_n le reste d'ordre n.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément sur X vers la fonction nulle.

Propriété 13 : Condtion nécessaire de CU

Si la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur X, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur X, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang les f_n sont bornées et $\|f_n\|_\infty \to 0$.

Méthode 4 : Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément

On peut rechercher $(a_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(a_n) \not\to 0$.

Méthode 5 : Montrer directement une convergence uniforme de série de fonctions

Ce n'est pas simple en général. On commence par la convergence simple de $\sum f_n$ vers f. Puis on peut tenter

- de majorer uniformément (en x) directement $|R_n| = |S_n - f|$,
- de calculer le reste (séries géométriques, télescopiques),
- d'utiliser le critère sur les séries alternées,
- d'effectuer une comparaison série-intégrale.

En réalité, la plupart du temps, il y a plus simple : la convergence normale.

3 Convergence normale

Définition 7 : Convergence normale

On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** sur X lorsque les f_n sont toutes bornées et la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Propriété 14 : La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue

Lorsque la série $\sum f_n$ converge normalement sur X,

- *elle converge uniformément,*
- *pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument.*

Méthode 6 : Convergence normale par domination

Pour montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur X, on peut rechercher $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$,
- $\sum \alpha_n$ converge.

Propriété 15 : Critère séquentiel de non convergence normale

S'il existe une suite $(a_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n \geqslant 0} f_n(a_n)$ ne converge pas absolument, alors $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur X.

4 Continuité

Théorème 5 : Transfert de continuité

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de chaque point de I (sur tout segment suffit).*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur I.*

5 Double limite

Théorème 6 : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \bar{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 $\sum f_n$ *converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$.*

Alors

C1 $\sum b_n$ *converge.*

C2 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$.

Autrement dit, les limites existant bien :

$$\lim_{x \to a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Méthode 7 : Pour montrer une absence de convergence uniforme...

... on peut utiliser la contraposée du théorème de la double limite.

Typiquement, lorsque la série des limites en a est divergente, ou lorsque les deux limites finales ne sont pas égales, c'est qu'il y a un défaut de convergence uniforme au point a.