5

Suites et séries de fonctions (1re partie)

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme.
b) Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur A, alors u est continue en a. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.	Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.	La démonstration est hors programme. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.
e) Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme.	
Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0.	
Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions.	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme.	La convergence normale implique la convergence absolue en tout point. Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.
f) Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.	
Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.	La démonstration n'est pas exigible.

Table des matières

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, X une partie non vide $\mathbb{R}$.

I Convergences simple et uniforme

1 Convergence simple

Définition 1 : Convergence simple

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.
On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur** X **vers** f lorsque pour tout $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$.

Remarque

R 1 – C'est-à-dire $\forall x \in X,\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N_{x,\varepsilon},\ \ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$. $N_{x,\varepsilon}$ dépend à la fois de x et de ε.

R 2 – Écrire $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f(x)$ n'a absolument aucun sens.

Exemple

E1 – $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{n+x}{1+nx}$ converge simplement vers $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
On remarque que les f_n sont bornées mais pas f.

E2 – $g_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ converge simplement vers $g = \mathbb{1}_{\{1\}}$.
On remarque que les g_n sont continues mais pas g.

E3 – On considère pour $n \geqslant 2$, h_n affine par morceaux telle que $h_n(0) = 0$, $h_n\left(\frac{1}{n}\right) = n$ et $h_n(x) = 0$ si $\dfrac{2}{n} \leqslant x \leqslant 1$.
La courbe a une forme de triangle afin de remarquer que $\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
Alors $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} 0$ et on remarque que $\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$.

2 Convergence uniforme

a Définition

Définition 2 : Convergence uniforme

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$.
On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur X vers f** lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de x. Autrement dit lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ \forall x \in X,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$.

Remarque

R3 – Graphiquement, à partir d'un certain rang, la courbe de f_n se situe dans la bande délimitée par les courbes $f-\varepsilon$ et $f+\varepsilon$.
La différence avec la convergence simple est que cette fois, le rang ne dépend que de ε, plus de x.

Propriété 1 : CU ⇒ CS

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Démonstration

Si on a un N qui convient pour tous les x, alors pour tout x , on a un N qui convient. ■

Propriété 2 : CU par majoration uniforme

S'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

H1 $\alpha_n \to 0$

H2 *pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$, $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \alpha_n$ (majoration **uniforme**, c'est-à-dire que α_n ne dépend pas de $x \in X$),*

alors

C1 *(f_n) converge uniformément vers f.*

Propriété 3 : Transmission du caractère borné par CU

On suppose que

H1 *les f_n sont bornées*

H2 *elles convergent uniformément vers f*

alors

C1 *f est bornée.*

Démonstration

Avec $\varepsilon = 1$, on a un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $\forall x \in X$, $\left|f(x)\right| - \left|f_n(x)\right| \leqslant \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant 1$.
En particulier, pour tout $x \in X$, $\left|f(x)\right| \leqslant \left|f_N(x)\right| + 1$. ■

b Norme infinie

Définition 3 : Norme

On appelle **norme** sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

Défini-positivité : Pour tout $x \in E$, $N(x) \geqslant 0$ et $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$.

Homogénéité : Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) : Pour tout $x, y \in E$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Propriété 4 : Utilisable directement

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$, alors $\sup(kA) = k\sup(A)$.

Définition 4 : Norme infinie

On définit, pour $f \in E = \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \left|f(x)\right|.$$

Propriété 5 : La norme infinie est une norme

Il s'agit d'une norme sur $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$.

Remarque

R4 – La preuve est à savoir faire.

c Lien avec la convergence uniforme

Propriété 6 : CU et norme infinie

Soit $f : X \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^X$. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f$ si et seulement si à partir d'un certain rang les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur X et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Remarque

R5 – Mais rien n'indique que les f_n soient bornées à priori.

Exemple

E4 – $f_n : x \mapsto e^x + \frac{1}{n}$ converge uniformément vers $\exp$ et aucune de ces fonctions n'est bornée.

Propriété 7 : Cas des fonctions bornées

Si les fonctions $f_n : X \to \mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$ sont bornées, alors

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} f \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration

C'est bien la même définition. ■

Propriété 8 : Non convergence uniforme

Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$ et s'il existe $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$, alors la convergence n'est pas uniforme.

Démonstration

Par contraposée : si la convergence est uniforme, alors les $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang, et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Or $|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$, donc $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$.

Ou bien, directement, si $\varepsilon > 0$, on a un rang N à partir duquel pour tout $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

En particulier, pour $x = x_n$, on obtient $\forall n \geqslant N,\ |f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve bien que $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$. ■

Méthode 1 : Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$

- On étudie la convergence simple et on note f la limite.
- Puis pour prouver qu'il y a convergence uniforme :
  - ⋆ Soit on cherche à déterminer $\|f_n - f\|_\infty$ par exemple en étudiant les variations, puis on montre que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
  - ⋆ Soit on majore uniformément les $|f_n(x) - f(x)|$, c'est-à-dire qu'on cherche $\alpha_n \to 0$ indépendant de x tel que $\forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$.
- Ou, pour prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme :
  - ⋆ Soit les $(f_n)_n$ sont bornées mais pas f.
  - ⋆ Soit trouver $(x_n)_n$ telle que $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$.

Exemple : On reprend les mêmes exemples

E5 – Pour le premier, il n'y a pas convergence uniforme car f n'est pas bornée alors que les f_n le sont.

E6 – $g_n : x \mapsto x^n$. Alors $\|g_n - g\|_\infty = 1$ ou bien $g_n(1 - 1/n) - g(1 - 1/n) \to e \neq 0$. Il n'y a pas convergence uniforme.

E7 – $h_n(1/n) - h(1/n) = n \not\to 0$.

Exercice 1 : CCINP 11

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $\big(f_n(x_n)-f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2 : Ancien CCINP 13

1. Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
   On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
   Démontrer que la fonction g est bornée.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=\begin{cases} n^3x & \text{si} \quad |x|\leqslant \frac{1}{n}\\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad |x|>\frac{1}{n}\end{cases}$$

   Prouver que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

3 Convergence uniforme locale

On suppose que X est une réunion d'intervalles.

Remarque

R6 – Soit $f:X\to\mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $x_0\in\overline{X}$.
La suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers** f **au voisinage de** x_0 lorsqu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $\eta>0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X\cap]x_0-\eta,x_0+\eta[$.
Bien sûr, si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X, elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X, mais, malheureusement, la réciproque est fausse.

R7 – Lorsque X n'est pas majoré, la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément vers** f **au voisinage de** $+\infty$ lorsqu'il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, soit, de manière équivalente, s'il existe $a>0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,+\infty[$.

Propriété 9 : CU sur tout segment ⇒ au v. de chaque point de X

Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans X, alors elle converge uniformément vers f au voisinage de tout point de X.

Remarque

R8 – La convergence uniforme sur tout segment n'implique pas non plus la convergence uniforme sur X, ni la convergence au voisinage des bornes ouvertes de X.
De plus, la convergence uniforme sur tout segment n'implique pas la convergence uniforme au voisinage de $+\infty$.

Exemple

E 8 – $g_n : x \mapsto x^n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment de $[0,1[$, mais pas sur $[0,1[$ comme déjà vu.

II CONTINUITÉ ET LIMITE

1 Continuité

Théorème 1 : Limite uniforme de fonctions continues en un point

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $x_0 \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue en x_0.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de x_0.*

Alors

C1 *f est continue en x_0.*

Démonstration

Soit $\eta > 0$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[= V$.

Alors, si $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leqslant \eta$ et $n \in \mathbb{N}$, $\left|f(x) - f(x_0)\right| \leqslant \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - f_n(x_0)\right| + \left|f_n(x_0) - f(x_0)\right|$.

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f au voisinage de a fournit un rang N à partir duquel, pour tout $x \in V$, $\left|f(x) - f_n(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. C'est donc le cas pour $x = x_0$.

En prenant $n = N$, la continuité de f_N, fournit un $\delta > 0$ tel que sur $I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $\left|f_N(x) - f_N(x_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Ainsi, si $|x - x_0| \leqslant \min(\eta, \delta)$, $\left|f(x) - f(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$.

Cela prouve bien que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$. ■

Corollaire 1 : Limite uniforme de fonctions continues sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue sur I.*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de chaque point de I (donc sur tout segment inclus dans I suffit).*

Alors

C1 *f est continue sur I.*

Méthode 2 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit que les f_n soient continues mais pas f.

Exemple

E 9 – $g_n : x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$.

Exercice 3 : CCINP 9

1. **Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.**

2. **On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$.**
   (a) **Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).**
   (b) **La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?**
   (c) **Soit $a>0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?**
   (d) **La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?**

Solution :

1. Cours.
2. (a) Limite simple : $\mathbb{1}_{\{0\}}$.
   (b) Continuité.
   (c) Oui, en majorant uniformément $|f_n - f|$.
   (d) Non : $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \not\to 0$.

2 Théorème de la double limite

Théorème 2 : de la double limite

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.*

Alors on a $b \in \mathbb{K}$ tel que

C1 $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$

C2 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$

Autrement dit, les limites existant bien :

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Remarque

R 9 – ⚠ Lorsque a est une borne ouverte de I, une convergence uniforme sur tout segment **ne suffit pas** ! (Mais lorsque $a \in I$, c'est simplement la continuité en a.)

Exemple

E 10 – $g_n : x \mapsto x^n$ en $a=1$: le résultat ne tient pas malgré la convergence uniforme sur tout segment.

Démonstration

Hors programme. On traite le cas où a est fini.
Si $a \in I$, on est ramené au théorème de continuité.
Sinon, l'idée est de prolonger par continuité les f_n en a en posant $f_n(a) = b_n$ pour voir appliquer le théorème précédent. Pour cela, on va commencer par montrer que (b_n) converge. On commence par montrer qu'elle est

bornée pour appliquer le théorème de Bolzano-Weierstraß.

Soit V un voisinage de a sur lequel $(f_n)_n$ converge uniformément.

Si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I \cap V$, $|b_n| \leqslant |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x)|$.

On a un rang N à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 1$.

On suppose dorénavant que $n \geqslant N$.

On a aussi un voisinage W_n de a sur lequel $|b_n - f_n(x)| \leqslant 1$.

En prenant $x_n \in I \cap V \cap W_n$, on tire $|b_n| \leqslant 2 + |f(x_n)|$.

Mais comme les f_n convergent en a, elle sont bornées au voisinage de a donc par convergence uniforme, f est aussi bornée (disons, par M) au voisinage de a.

On obtient donc, pour $n \geqslant N$, $|b_n| \leqslant 2 + M$ et donc (b_n) est bornée.

Par théorème de Bolezano-Weierstraß, on en extrait une suite convergente : $b_{\varphi(n)} \to b$.

On montre alors que $b_n \to b$.

Or pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$,

$$|b_n - b| \leqslant |b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| + |f_{\varphi(n)}(x) - b_{\varphi(n)}| + |b_{\varphi(n)} - b|.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

On a un voisinage V' de a sur lequel, à partir d'un rang N, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$. Comme $\varphi(n) \geqslant n$, on a alors aussi $|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$.

Puis des voisinages W'_n et W''_n de a sur lesquel $|b_n - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$ et $|b_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n)}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$ respectivement.

Puis un rang N' à partir duquel $|b_{\varphi(n)} - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$.

Finalement, en prenant $n \geqslant \max(N, N')$ et $x \in I \cap V' \cap W'_n \cap W''_n$, alors tire $|b_n - b| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, $b_n \to b$.

On prolonge les f_n par continuité en a en posant $f_n(a) = b_n$, et on pose $f(a) = b$. Les f_n ainsi prolongées sont continues en a et convergent uniformément vers f (pas de problème en a car $b_n \to b$), qui est aussi continue a, donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$. ■

Méthode 3 : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit d'avoir a tel qu'on n'ait pas $\lim\limits_{x \to a}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x)\right)$ alors que ces limites existent.

III Approximations uniformes

1 Par des polynômes

Théorème 3 : de Weierstraß

On donne trois énoncés équivalents :

- *Toute fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.*
- *Soit f continue sur le segment $[a, b]$. Il existe une suite fonction $(p_n)_n$ de fonctions polynomiales telle que $p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} f$ sur $[a, b]$, c'est-à-dire $\|p_n - f\|_\infty \to 0$.*
- *Soit f continue sur le segment $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale p telle que $\|p - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.*

Démonstration

Non exigible. Preuve classique par les polynômes de Bernstein en TD. ■

Remarque

R 10 – Le résultat ne tient plus sur un intervalle non borné.

Exercice 4

Montrer que si une fonction polynomiale est bornée sur un intervalle qui ne l'est pas, elle est constante, puis qu'une limite uniforme de fonctions polynomiales sur un intervalle non borné est polynomiale.

Solution : En effet, commençons par remarquer quitte à prendre une limite en une borne infinie que si une fonction polynomiale est bornée sur un intervalle qui ne l'est pas, elle est constante.

On confond le polynôme et la fonction polynomiale associée.

Supposons alors qu'une fonction f est limite uniforme de la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un intervalle non borné I. On a un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $P_n - f$ est bornée. Mais alors, si $n \geqslant N$, $P_n - P_N = (P_n - f) + (f - P_N)$ est bornée sur I qui ne l'est pas et polynomiale, donc est constante.

On a donc $c_n \in \mathbb{K}$ tel que $P_n = P_N + c_n = P_N - P_N(a) + P_n(a)$ où a est un point quelconque de I.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient pour tout $x \in I$, $f(x) = P_N(x) - P_N(a) + f(a)$ donc f est une fonction polynomiale.

2 Par des fonctions en escalier

Théorème 4 : Approximation uniforme d'une fonction CPM sur un segment par des fonctions en escalier

Toute fonction continue par morceau sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Remarque

R 11 – On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver φ en escalier telle que $\|\varphi - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Alors, en posant $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$, on obtient φ_n en escalier telle que $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers f.

Démonstration

Cas continu Soit $\varepsilon > 0$. Par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$. On a donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a,b],\quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

On choisit une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ de pas $h = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1} (a_{k+1} - a_k) \leqslant \eta$.

On définit alors $\varphi : x \mapsto \begin{cases} f(a_k) & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}[\\ f(b) & \text{si } x = b \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x \in [a,b[$, on a k tel que $x \in [a_k, a_{k+1}[$ et $|x - a_k| \leqslant |a_{k+1} - a_k| \leqslant \eta$ donc $|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(a_k)| \leqslant \varepsilon$, soit $x = b$ et $|f(b) - \varphi(b)| = 0 \leqslant \varepsilon$.

On a donc bien $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Cas continu par morceaux Soit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ adaptée à f.

Chaque $f_{|]a_k, a_{k+1}[}$ se prolonge par continuité en une fonction f_k continue sur $[a_k, a_{k+1}]$: on a $\varphi_k \in \mathscr{E}([a,b])$ telle que $\left\|f_k - \varphi_j\right\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

On pose alors $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in]a_k, a_{k+1}[\\ f(a_k) & \text{si } x = a_k \end{cases}$ une fonction en escalier.

Alors, si $x \in [a,b]$, soit on a k tel que $x \in]a_k, a_{k+1}[$ et $|\varphi(x) - f(x)| = |\varphi_k(x) - f_k(x)| \leqslant \varepsilon$ soit on a k tel que $x = a_k$ et $|\varphi(a_k) - f(a_k)| = 0 \leqslant \varepsilon$.

On a donc bien $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

IV SÉRIES DE FONCTIONS

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{K}^X$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$, la somme partielle au rang n de la série de fonctions $\sum f_n$.

On souhaite étudier la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en étudiant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sur le même schéma que les séries numériques.)

1 Convergence simple

Définition 5 : Convergence simple

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** X si pour tout $x\in X$, la série $\sum f_n(x)$ converge.Lorsque c'est le cas,

- $f : x\in X \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$ et est notée $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
- Si $n\in\mathbb{N}$, $R_n = f - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ est le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$.

Remarque

R 12 – ⚠ f désigne ici la somme de la **série de fonctions** $\sum f_n$ et non la limite simple de la **suite de fonctions** (f_n).

R 13 – Ainsi, la **serie** de fonctions $\sum f_n$ converge simplement si et seulement si la **suite** de fonctions (S_n) converge simplement, et dans ce cas, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

R 14 – Lorsque la série $\sum f_n$ converge simplement, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle, et la réciproque est fausse.

R 15 – La somme d'une série de fonction (et le reste si elle converge simplement) sont des fonctions.

Exemple : Étudier la convergence simple de $\sum f_n$

E 11 – $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}$

E 12 – $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{1+n^2x^2}$

E 13 – $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$

Lorsque cela a un sens, on appelle **fonction ζ de Riemann** la fonction

$$\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

2 Convergence uniforme

Définition 6 : Convergence uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur X lorsque la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur X, c'est-à-dire lorsqu'il existe $f : X \to \mathbb{K}$ tel que
- à partir d'un certain rang, $S_n - f$ bornée sur X,
- $\|S_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarque

R 16 – On définit aussi de même la convergence uniforme au voisinage d'un point (fini ou non) de la série de fonction comme convergence uniforme locale de (S_n).

Propriété 10 : CS ⇒ CU

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur X vers f, alors elle converge simplement vers f.

Propriété 11 : CU par majoration uniforme

Si on a une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que

H1 $\alpha_n \to 0$

H2 $\forall x \in X,\ |S_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$ *au moins à partir d'un certain rang*

alors

C1 $\sum f_n$ *converge uniformément sur X vers f.*

Démonstration

Héritée des suites de fonctions. ■

Propriété 12 : CU par CU des restes vers la fonction nulle

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant simplement sur X, R_n le reste d'ordre n.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément sur X vers la fonction nulle.

Démonstration

Conséquence immédiate de la définition. ■

Exercice 5 : CCINP 8

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

1. **Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.**

2. Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

Corrigé :

On pose : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ f_n(x)=\dfrac{(-1)^n\, e^{-nx}}{n}$. On a alors $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ f_n(x)=(-1)^n u_n(x)$ avec $u_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Si $x<0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|f_n(x)\right|=+\infty$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.

   Si $x\geqslant 0$, alors $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=0$.

   Donc d'après 1.(a), $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

   Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

   Remarque : pour $x>0$, on a aussi convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

   En effet, pour tout réel $x>0$, $n^2\left|f_n(x)\right|=ne^{-nx}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $\left|f_n(x)\right|=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$, on peut poser $\forall\, x\in[0,+\infty[,\ R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

   Alors, comme, $\forall\, x\in[0,+\infty[$, $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)=0$, on en déduit, d'après 1.(b), que :

   $\forall\, x\in[0,+\infty[,\ |R_n(x)|\leqslant\dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$.

   Et donc $\forall\, x\in[0,+\infty[,\ |R_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)

   Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$, alors (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$.

   C'est-à-dire $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Propriété 13 : Condtion nécessaire de CU

Si la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément sur X, alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur X, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang les f_n sont bornées et $\|f_n\|_\infty\to 0$.

Démonstration

$(R_n)_n$ converge uniformément vers 0 donc $(f_n)=(R_n-R_{n-1})_n$ aussi car $\left|f_n(x)\right|\leqslant\|R_n-R_{n-1}\|_\infty\leqslant\|R_n\|_\infty-\|R_{n-1}\|_\infty\to 0$ avec une majoration indépendante de x. ∎

Méthode 4 : Pour montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément

On peut rechercher $(a_n)\in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n(a_n)\not\to 0$.

Exercice 6 : CCINP 17

On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in[0;+\infty[,\ f_n(x)=nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. **Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.**
2. **$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.**

Corrigé :

1. On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in[0;+\infty[,\ f_n(x)=nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Soit $x\in[0;+\infty[$.
   Si $x=0$, $\forall\, n\in\mathbb{N},\ f_n(0)=0$ donc $\sum f_n(0)$ converge.

Si $x \neq 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 f_n(x) = 0$, donc au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge absolument donc, par critère de domination, $\sum f_n(x)$ converge absolument.
On en déduit que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, donc f_n est bornée sur $[0;+\infty[$.
Comme f_0 est bornée ($f_0 = 0$), on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée.
De plus, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
En effet, si $x = 0$ alors $f_n(0) = 0$ et si $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = e^{-1}$.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left|f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| \leqslant \sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t)|$; donc $\sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t)| \geqslant e^{-1}$.
Ainsi, $\sup\limits_{t\in[0;+\infty[} |f_n(t)| \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$.
On en déduit que (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0;+\infty[$.
Donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;+\infty[$.

Méthode 5 : Montrer directement une convergence uniforme de série de fonctions

Ce n'est pas simple en général. On commence par la convergence simple de $\sum f_n$ vers f. Puis on peut tenter

- de majorer uniformément (en x) directement $|R_n| = |S_n - f|$,
- de calculer le reste (séries géométriques, télescopiques),
- d'utiliser le critère sur les séries alternées,
- d'effectuer une comparaison série-intégrale.

En réalité, la plupart du temps, il y a plus simple : la convergence normale.

Exemple

E 14 – Fonction ζ sur $]1,+\infty[$: $R_n(x) \leqslant \dfrac{1}{(x-1)n^{x-1}}$ par comparaison à une intégrale. Convergence uniforme sur tout $[a,+\infty[$ où $a > 1$.

3 Convergence normale

Définition 7 : Convergence normale

On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** sur X lorsque les f_n sont toutes bornées et la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Propriété 14 : La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue

Lorsque la série $\sum f_n$ converge normalement sur X,

- *elle converge uniformément,*
- *pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument.*

Démonstration

- $|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty \to 0.$
- Pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$.

Remarque

R 17 – On a le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Convergence uniforme} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \text{Convergence normale} & & & & \text{Convergence simple} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{Convergence absolue} & & \end{array}$$

Les réciproques sont fausses.

R 18 – En cas de convergence normale locale / sur tout segment, on en tire une convergence uniforme du même type.

Exemple

E 15 – Pour la fonction ζ, il n'y a pas convergence normale sur $]1,+\infty[$, mais sur tout $[a,+\infty[$.
On retrouve la convergence uniforme.

E 16 – $\sum n^\alpha x e^{-n^2 x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha < 1$.
Sinon, convergence normale sur $[a,+\infty[$.

Méthode 6 : Convergence normale par domination

Pour montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur X, on peut rechercher $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$,
- $\sum \alpha_n$ converge.

Exemple

E 17 – $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$.

Propriété 15 : Critère séquentiel de non convergence normale

S'il existe une suite $(a_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(a_n)$ ne converge pas absolument, alors $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur X.

Exemple

E 18 – $f_n(x) = x e^{-n^2 x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 7 : CCINP 15

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. **Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. **Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.**
3. **La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?**

---

1. Voir Cours.
2. Voir Cours
3. Si $|z| \leqslant R$, $\left|\frac{n^2}{n!} z^n\right| = \frac{n^2}{n!}|z|^n \leqslant \frac{n^2}{n!}|R|^n$ qui ne dépend pas de z.

   Donc $f_n : z \mapsto \frac{n^2}{n!} z^n$ est bornée sur $D_f(0,R)$ et $\|f_n\|_{\infty, D_f(0,R)} \leqslant \frac{n^2}{n!}|R|^n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison de séries à termes généraux positifs dans le cas de convergence et par critère de Riemann, $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $D_f(0,R)$.

4 Continuité

Théorème 5 : Transfert de continuité

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout n, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de chaque point de I (sur tout segment suffit).*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur I.*

Exemple

E 19 – ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Exercice 8 : CCINP 18

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} u_n$.

1. **Étudier la convergence simple de cette série.**
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. **(a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.**

   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

Solution :

1. Si $|x| < 1$, il y a convergence absolue car $\frac{|x|^n}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   Si $|x| > 1$, il y a divergence grossière car $\frac{|x|^n}{n} \to +\infty$.

   Si $x = -1$, la série harmonique diverge, si $x = 1$, la série harmonique alternée converge (par exemple par le TSSA).
   Finalement, la série converge sur $D =]-1, 1]$.

2. (a) $\|u_n\|_{\infty,]-1,1]} = \dfrac{1}{n}$ donc il n'y a pas de convergence normale sur $D =]-1,1]$. Par contre, sur tout intervalle de la forme $]-a,a[$ où $0 < a < 1$, $\|u_n\|_{\infty,]-1,1]} = \dfrac{a^n}{n} = |u_n(a)|$ qui est un terme général de série convergence, donc il y a convergence normale sur $]-a,a[$.
On a donc aussi convergence uniforme sur ce type d'intervalle.
Reste à savoir s'il y a convergence uniforme au voisinage de 1.
Or, le théorème spécial s'appliquant pour $x \in [0,1]$, la majoration du reste donne

$$\forall x \in [0,1], \quad |R_{n+1}(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

qui ne dépend pas de x et tend vers 0.
Il y a donc bien convergence uniforme sur $[0,1]$.

(b) Comme **H1** les u_n sont toutes continues sur $]-1,1]$ et comme, d'après la question précédente, **H2** $\sum u_n$ converge uniformément au voisinage de tout point de $D =]-1,1]$, S est continue sur D.

5 Double limite

Théorème 6 : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à $\mathbb{K}^I$, $(b_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \overline{I}$ éventuellement infini. On suppose que

H1 *$\sum f_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a.*

H2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} b_n$.*

Alors

C1 *$\sum b_n$ converge.*

C2 *$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$.*

Autrement dit, les limites existant bien :

$$\lim_{x \to a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Remarque

R 19 – ⚠ Lorsque a est une borne ouverte de I, une convergence uniforme sur tout segment **ne suffit pas** !

Exemple

E 20 – ζ en $+\infty$ tend vers 1.

Exercice 9

On pose $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Montrer que la somme f de la série de fonctions est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer qu'il n'y a pas de convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 10 : CCINP 53

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. **(a) Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.**

   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

   (c) $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

2. **Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.**
3. **Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.**

Corrigé

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$ et donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(0)$ converge.

Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^4x^3}$.

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$ est une série de Riemann convergente donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes de signe constant, $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

Conclusion : $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.
• Prouvons que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

$\forall x \in [a,b]$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{b}{n^4a^4}$ (majoration indépendante de x).

De plus, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

• Prouvons que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

$\forall x \in [a,+\infty[$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{x}{n^4x^4} = \dfrac{1}{n^4x^3} \leqslant \dfrac{1}{n^4a^3}$ (majoration indépendante de x).

De plus, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^4}$ converge (série de Riemann convergente).

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

(c) On remarque que f_n est continue sur le compact $[0,1]$, donc f_n est bornée sur $[0,1]$.
De plus, d'après 1.(b), $\forall x \in [1,+\infty[$, $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^4}$, donc f_n est bornée sur $[1,+\infty[$.
On en déduit que f_n est bornée sur $[0,+\infty[$ et que $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ existe.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| \geqslant f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n}$.

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

Autre méthode :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_n'(x) = \dfrac{1-3n^4x^4}{(1+n^4x^4)^2}$.

On en déduit que f_n est croissante sur $\left]0, \dfrac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}, +\infty\right[$.

f_n étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f_n est bornée.

Donc $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ existe et $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{3^{\frac{1}{4}}n}) = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4n}$.

Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum_{n\geqslant 1} \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ diverge.

Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $]0,+\infty[$. (1)
$\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$. (2)
Donc, d'après (1) et (2), f est continue sur $]0,+\infty[$.
Comme f est impaire, on en déduit que f est également continue sur $]-\infty,0[$.
Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ car, au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^4 x^3}$.
D'après 1.(b), $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1,+\infty[$.

Donc, d'après le cours, f admet une limite finie en $+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 11 : Contre-exemple en 0 sur tout segment

Soit $f_n : x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

1. Étudier la convergence simple puis calculer la somme f de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Montrer qu'il y a convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Que penser de la double-limite en 0^+ ?

Méthode 7 : Pour montrer une absence de convergence uniforme...

... on peut utiliser la contraposée du théorème de la double limite.

Typiquement, lorsque la série des limites en a est divergente, ou lorsque les deux limites finales ne sont pas égales, c'est qu'il y a un défaut de convergence uniforme au point a.

6 Grand classique incontournable (mais HP)

Exercice 12 : Fonctions ζ de Riemann et η de Dirichlet

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

1. **Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\zeta(x)$?**
2. **Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ?**
3. **Étudier les variations de ζ.**
4. **Calculer la limite en $+\infty$.**
5. **Calculer la limite en 1. Le théorème de la double-limite s'applique-t-il ? Que peut-on en déduire ?**
6. **Donner un équivalent de ζ en 1 par comparaison série-intégrale.**
7. **Tracé le graphe de ζ.**
8. **Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\eta(x)$? Sur quel type d'intervalles a-t-on convergence normale ? uniforme ?**
9. **Montrer que si $x>1$, $\eta(x) = (2^{1-x}-1)\zeta(x)$. Retrouver l'équivalent de ζ en 1.**

---

1. $]1,+\infty[$

2. $[a,+\infty[$ où $a>1$.
3. ζ est décroissante car les f_n le sont.
4. 1 par double limite.
5. 1re solution : comparer à une intégrale, cf question suivante.
   2e solution : on a envie de comparer ζ près de 1 à la série harmonique.
   Soit $n\in\mathbb{N}$. Comme ζ st décroissante, elle a une limite ℓ finie ou $+\infty$ en 1.
   Or on a $\ell \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x} \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
   Donc $\ell=+\infty$.
   ou encore $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x} \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant A$ à partir d'un rang N.
   Pour $n=N$, on a V voisinage de 1 tel que sur V, $\zeta(x)\geqslant \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^x}\geqslant A$.
   Donc ζ tend vers $+\infty$ en 1.
6. $\frac{1}{x-1}$.
7.
8. CS sur $\mathbb{R}_*^+$ par TSSA.
   CN sur $[a,+\infty[$, $a>1$.
   CU sur $[a,+\infty[$, $a>0$ par majoration du reste TSSA.
9. TSSA apcr : CU sur $[a,+\infty[$ pour $a>0$ de toutes les dérivées.
10. Simplifier $\phi(x)+\zeta(x)$.