

Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} .

presque nulles de scalaires).

Si $\mathcal{F} = (\vec{x}_i)_{i \in I}$, les combinaisons linéaires d'éléments de \mathcal{F} sont les $\sum_{i \in I} \lambda_i \vec{x}_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$.

STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL (MP2I)

1 Définition

Définition 1 : \mathbb{K} -espace vectoriel

Soit E un ensemble et \mathbb{K} un corps. On appelle **loi de composition externe** sur E toute application

$$\begin{array}{l} \cdot : \\ \mathbb{K} \times E \rightarrow E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \end{array}$$

On appelle **espace vectoriel sur \mathbb{K}** ou **\mathbb{K} -espace vectoriel** tout triplet $(E, +, \cdot)$ tel que

- E est un ensemble, $+$ est une loi de composition interne sur E et \cdot est une loi de composition externe sur E .
- $(E, +)$ est un groupe abélien d'élément neutre noté $\vec{0}_E$ ou 0_E .
- **Pseudo-distributivité à droite :**

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E, (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}.$$

- **Pseudo-distributivité à gauche :**

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}.$$

- **Pseudo-associativité :**

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E, (\lambda \times \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}).$$

- **Pseudo-élément neutre :** $\forall \vec{x} \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Définition 2 : Famille presque nulle, combinaison linéaire

On appelle **famille presque nulle** de scalaire toute famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle que $\lambda_i \neq 0$ pour un nombre fini de vecteurs seulement. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulles.

Si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ sont des vecteurs de E , on appelle **combinaison linéaire** de $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, tout vecteur de la forme $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

La définition s'étend aux familles infinies de vecteurs en n'ayant qu'un nombre fini de scalaires non nuls : toute combinaison linéaire est nécessairement finie (d'où l'intérêt des familles

Propriété 1 : Produit cartésien de \mathbb{K} -espaces vectoriels

Si $(E, \underset{E}{+}, \underset{E}{\cdot})$ et $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot})$ sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels alors $(E \times F, \underset{E \times F}{+}, \underset{E \times F}{\cdot})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, avec les lois coordonnées à coordonnées : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(\vec{x}, \vec{y}), (\vec{x}', \vec{y}') \in E \times F$,

$$(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}', \vec{y}') = \left(\vec{x} \underset{E}{+} \vec{x}', \vec{y} \underset{F}{+} \vec{y}' \right)$$

$$\lambda \cdot (\vec{x}, \vec{y}) = \left(\lambda \underset{E}{\cdot} \vec{x}, \lambda \underset{F}{\cdot} \vec{y} \right)$$

Propriété 2 : Fonctions à valeurs dans un \mathbb{K} -espace vectoriel

Si X est un ensemble non vide et $(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot})$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors $(F^X, \underset{F^X}{+}, \underset{F^X}{\cdot})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel avec les lois habituelles sur les fonctions : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in F^X$, alors

$$f + g : x \mapsto f(x) \underset{F}{+} g(x)$$

$$\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \underset{F}{\cdot} f(x)$$

Propriété 3 : Espaces vectoriels classiques

Sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels :

- $(\mathbb{K}, +, \times)$,
- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$,
- $(\mathbb{K}^D, +, \cdot)$ pour tout ensemble D ,
- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$,
- $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$.

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel, et, plus généralement, si \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{L} , alors $(\mathbb{L}, +, \times)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.



2 Sous-espace vectoriel

Définition 3 : Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et F une partie de E .

On dit que $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque $(F, +|_F, \cdot|_{\mathbb{K} \times F})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Propriété 4 : Caractérisation deux sous-espaces vectoriels

F est un sous-espace vectoriel de E

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset \ (0_E \in F) \\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \vec{x} + \vec{y} \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in F, \lambda \vec{x} \in F \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset \ (0_E \in F) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \vec{x} + \lambda \vec{y} \in F \\ (F \text{ stable par combin. linéaires}) \end{cases}$$

3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété 5 : Intersection de sev

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

4 Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Définition 4 : Sous-espaces vectoriels engendré par une partie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $A \subset E$.

On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A .

On le note $\text{Vect } A$ ou $\text{Vect}_{\mathbb{K}} A$.

Si $F = \text{Vect } A$, on dit que A **engendre** F ou que F est une **partie génératrice** de F .

Propriété 6 : Caractérisation d'un Vect

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $A \subset E$. $\text{Vect } A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\text{Vect } A = \{ \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n ; n \in \mathbb{N}^*, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \}.$$



Méthode 1 : Passer de famille génératrice à équations

On résout le système donné par le paramétrage traduisant le caractère générateur de la famille en égalant les coordonnées : il y a plus d'équations que d'inconnues.

Les premières servent à déterminer les paramètres du système, les autres formes des équations de notre sous-espace après élimination des paramètres.



Méthode 2 : Passer d'équations à famille génératrice

Pour passer d'un système d'équations décrivant un sous-espace vectoriel à une famille génératrice de celui-ci, on résout le système formé par les équations : certaines coordonnées vont alors s'exprimer en fonction d'autres qui vont devenir des paramètres et donner une famille génératrice.



Méthode 3 : Égalité de Vect

Pour montrer que $\text{Vect } A = \text{Vect } B$, on montre que

$$A \subset \text{Vect } B$$

puis que

$$B \subset \text{Vect } A.$$

5 Familles de vecteurs

Définition 5 : Familles liées, libres, génératrices, bases

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$.

- La famille \mathcal{F} est dite **liée** (ses vecteurs sont dit **linéairement dépendants**) lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale de ses vecteurs égale au vecteur nul :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}_E$$

- La famille \mathcal{F} est dite **libre** (ses vecteurs sont dit **linéairement indépendants**) lorsqu'elle n'est pas liée, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de ses vecteurs égale au vecteur nul est triviale : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}_E \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0.$$

- La famille \mathcal{F} est dite **génératrice** de E (ou **engendre** E) lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\forall \vec{x} \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i$$

c'est-à-dire $E = \text{Vect } \mathcal{F}$.

- La famille \mathcal{F} est une **base** de E lorsqu'elle est libre et génératrice dans E .

Toutes ces définitions s'étendent aux familles infinies, les combinaisons linéaires restant toujours finies (les suites de coefficients $(\lambda_i)_i$ sont presque nulles).



Méthode 4 : Montrer qu'une famille est liée

- Pour montrer qu'une famille est liée, on cherche une combinaison linéaire nulle non triviale de ses vecteurs.
- Cela peut parfois se faire par exemple en résolvant un système linéaire.
- On raisonne fréquemment par l'absurde et/ou par récurrence.
- On peut aussi utiliser un argument de dimension (s'il y a plus de vecteurs que la dimension, la famille est liée).



Méthode 5 : Montrer qu'une famille est libre

- Pour montrer qu'une famille est libre, on prend une combinaison linéaire nulle des vecteurs, et on montre qu'elle est triviale : tous les scalaires sont nuls.
- Il suffit aussi de concaténer des familles libres de vecteurs pris dans des sous-espaces en somme directe.
- Une famille de polynômes **non nuls** à degrés étagés est libre.
- On peut aussi, en dimension finie, utiliser un déterminant.
- Dans un espace préhilbertien, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- On verra dans le cours de réduction qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre.

Propriété 7 : Famille de polynômes à degrés étagés

Toute famille de polynômes **non nuls** et à **degrés étagés** (c'est-à-dire deux à deux distincts) est libre.

Définition – Propriété 1 : Coordonnées

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E si et seulement si $\forall \vec{x} \in E, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$. Le triplet (x_1, \dots, x_n) est appelé **n -uplet des coordonnées** de \vec{x} dans la base \mathcal{B} .

Cette définition s'étend au cas où \mathcal{B} est infinie, les famille des coordonnées étant presque nulles.

Définition – Propriété 2 : Bases canonique

On appelle **bases canoniques** de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_n, p(\mathbb{K})$ les familles

- $((0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))_{1 \leq k \leq n}$,
 \uparrow
 k^e
- $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$,
- $(1, X, X^2, \dots, X^n)$,
- $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

Propriété 8 : Sur-famille et sous-famille

Toute sur-famille d'une famille liée ou génératrice l'est encore.

Toute sous-famille d'une famille libre l'est encore.

Propriété 9 : Complétion d'une famille libre

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y} \in E$.

- $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y})$ libre $\iff \begin{cases} (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \text{ libre} \\ y \notin \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \end{cases}$
- $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ liée si et seulement s'il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\vec{x}_{i_0} \in \text{Vect}(\vec{x}_i)_{i \neq i_0}$.
Lorsque c'est le cas, on a alors

$$\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \text{Vect}(\vec{x}_i)_{i \neq i_0}.$$



6 Sommes de sous-espaces vectoriels (MPI)

Définition 6 : Sommes de sev

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E . On note

$$F_1 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i = \{ \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n \mid \forall i, \vec{x}_i \in F_i \}.$$

Ainsi,

$$\vec{x} \in \sum_{i=1}^n F_i \iff \exists (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, \vec{x} = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n.$$

Propriété 10

- (i) Une somme de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- (ii) Si A_1, \dots, A_n sont des parties de E , alors

$$\text{Vect} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \text{Vect } A_k.$$

7 Somme directe (MPI)

Définition 7 : Somme directe

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F_1, \dots, F_n sont en **somme directe** lorsque pour tout $\vec{x} \in F_1 + \dots + F_n$, l'écriture $\vec{x} = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n$ où $\forall i, \vec{x}_i \in F_i$ est unique.

On note alors

$$F_1 + \dots + F_n = F_1 \oplus \dots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^n F_i.$$

Propriété 11 : Caractérisation

F_1, \dots, F_n sont en somme directe si et seulement si $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$,

$$\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n = \vec{0}_E \implies \vec{x}_1 = \dots = \vec{x}_n = \vec{0}_E.$$

Propriété 12 : Cas de deux sous-espaces

Deux sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{ \vec{0}_E \}$.

Le résultat est faux pour plus de deux sous-espaces.

8 Sous-espaces supplémentaires (MPI)

Définition 8 : Sous-espaces supplémentaires

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

F et G sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$ c'est-à-dire

$$\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in F \times G, \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G.$$

Propriété 13

- (i) F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ et $F \cap G = \{ \vec{0}_E \}$.
- (ii) Il n'y a pas unicité du supplémentaire en général.



Méthode 6 : Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires

- Raisonner par analyse-synthèse : si on a une décomposition $x = a + b$, alors... $a = \dots$ et $b = \dots$ (unicité sous réserve d'existence), et réciproquement de tels a et b conviennent (d'où l'existence).
- Montrer que $F \cap G = \{ \vec{0}_E \}$ (en général plus facile) et $F + G = E$ (en général moins facile).
- En dimension finie, utiliser des bases (une concaténation de bases de chaque sev donne une base de l'espace entier, dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$) ou un argument de dimension $\dim F + \dim G = \dim E$ et, au choix, soit $F \cap G = \{ \vec{0}_E \}$, soit $F + G = E$: voir plus loin.
- Reconnaître les sous-espaces caractéristiques d'une symétrie ou d'une projection.
- Plus généralement, reconnaître les sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable (voir cours de réduction).
- Reconnaître, si F est de dimension finie dans un espace préhilbertien, une décomposition $F \oplus F^\perp = E$.

Définition 9 : Sous-espaces supplémentaires

Soient F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F_1, \dots, F_n sont **supplémentaires dans** E lorsque $F_1 \oplus \dots \oplus F_n = E$ c'est-à-dire

$$\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, \vec{x} = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n.$$

II DIMENSION FINIE (MP2I)

1 Espace de dimension finie

Définition 10 : Espace de dimension finie

Un \mathbb{K} -espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.
 Dans le cas contraire, il est dit de **dimension infinie**.

2 Dimension, bases extraites et incomplètes

Propriété 14 : Existence de bases et leur taille

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{\vec{0}_E\}$.

- E possède des bases.
- Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments.

Définition 11 : Dimension

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.
 Si $E = \{\vec{0}_E\}$, on pose $\dim E = 0$.
 Sinon, on note $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$) le nombre de vecteurs de toute base de E .

Propriété 15 : Taille des familles libres ou génératrices

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs, toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

Corollaire 1

Toute famille d'au moins $n + 1$ vecteurs en dimension n est liée.

Théorème 1 : Caractérisation des bases

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, \mathcal{B} une famille finie de vecteurs de E .
 \mathcal{B} est une base de E si et seulement si elle contient $n = \dim E$ vecteur et elle est libre **ou** génératrice.

Théorème 2 : de la base extraite

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{\vec{0}_E\}$. De toute famille génératrice de E , on peut extraire une base de E .

Théorème 3 : de la base incomplète

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. On peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E .
 De plus, les vecteurs pour compléter peuvent être choisis dans n'importe quelle famille génératrice de E .

Corollaire 2

Si E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, \mathcal{G} une famille génératrice de E et \mathcal{L} une sous-famille libre de \mathcal{G} .
 Alors on peut trouver une base \mathcal{B} de E telle que \mathcal{L} soit une sous-famille de \mathcal{B} et \mathcal{B} soit une sous-famille \mathcal{G} .

3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Propriété 16 : Base et dimension d'un produit cartésien

Si E_1, \dots, E_n sont des espaces de dimension finie, $E_1 \times \dots \times E_n$ l'est encore et $\dim E_1 \times \dots \times E_n = \dim E_1 + \dots + \dim E_n$.
 Si E est de dimension finie, E^n l'est encore et $\dim E^n = n \dim E$.

4 Dimension des sous-espaces

Propriété 17 : dimension des sous-espaces

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace de E .
 Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.
 L'entier $\dim E - \dim F$ est appelé **codimension** de F dans E .

Définition 12 : Droites, plans

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .
 Un sous-espace de dimension 1 est une **droite vectorielle** de E , un sous-espace de dimension 2 est un **plan vectoriel** de E .



5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 13 : Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathcal{F} une famille d'éléments de E .
On appelle **rang** de \mathcal{F} l'entier $\text{rg } \mathcal{F} = \dim(\text{Vect } \mathcal{F})$.

Propriété 18 : Rang d'une sous-famille, caractérisation des familles libres

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathcal{F} une famille d'éléments de E .

- (i) Si \mathcal{F}' est une sous-famille de \mathcal{F} , $\text{rg } \mathcal{F}' \leq \text{rg } \mathcal{F}$.
- (ii) Si \mathcal{F} est finie, \mathcal{F} est libre si et seulement si elle contient $\text{rg } \mathcal{F}$ vecteurs.

6 Somme directe et supplémentaire (MPI)

Propriété 19 : Caractérisation de la supplémentarité avec des bases

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F_1, \dots, F_n des sous-espaces de dimension finie, \mathcal{B}_{F_i} une base de F_i , \mathcal{C} la famille obtenue en mettant bout à bout les \mathcal{B}_{F_i} (concaténation).

On a toujours que \mathcal{C} engendre $H = F_1 + \dots + F_n$, et

les F_i sont en somme directe si et seulement si \mathcal{C} est libre donc une base de H .

On dit alors que la base \mathcal{C} de H est adaptée à la décomposition $H = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$.

On a alors $\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_n) = \sum_{i=1}^n \dim F_i$.

Corollaire 3

Soient F_1, \dots, F_n des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^n F_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\sum_{i=1}^n F_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \dim F_i$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Corollaire 4 : Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F_1, \dots, F_n des sous-espaces de E .

F_1, \dots, F_n sont supplémentaires dans E (ie $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1. $E = F_1 + \dots + F_n$.
2. La somme est directe.
3. $\dim E = \sum_{i=1}^n \dim F_i$.

Corollaire 5 : Existence et dimension des supplémentaires

Tout sous-espaces vectoriel F d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie E admet un supplémentaire dans E .

De plus, si $p = \dim F$ et $n = \dim E$, tout supplémentaire de F est de codimension p , c'est-à-dire de dimension $n - p$.

7 Formule de Grassmann

Propriété 20 : Formule de Grassmann

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F, G des sous-espaces de dimension finie.

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$



APPLICATIONS LINÉAIRES (MP2I)

LINÉAIRES

1 Généralités

□ Définition

Définition 14 : Application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u: E \rightarrow F$.

On dit que u est une **application linéaire** lorsque

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}) \\ \forall \vec{x} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) \end{array} \right.$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(\vec{x} + \lambda \vec{y}) = u(\vec{x}) + \lambda u(\vec{y}).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F .

- Si u est bijective, on parle d'**isomorphisme** (d'espaces vectoriels).
- Si $E = F$, on parle d'**endomorphisme** et on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.
- Si $E = F$ et u est bijective, on parle d'**automorphisme**.
- Si $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, on dit que f est une **forme linéaire**.
- On note $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ appelé **dual** de E l'ensemble des formes linéaires sur E .

b Propriétés

Propriété 21

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (i) $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$
- (ii) $\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in E, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},$

$$u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\vec{x}_i).$$
- (iii) Si A est une partie de E ,
 $u(\text{Vect } A) = \text{Vect}(u(A)).$
- (iv) Si E' est un sous-espace vectoriel de E ,
 $u|_{E'} \in \mathcal{L}(E', F)$ (u induit une application linéaire sur E').
- (v) Si u est bijective (isomorphisme) alors
 $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E).$
- (vi) $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- (vii) Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.
- (viii) Si E' est un sous-espace vectoriel de E et F' est un sous-espace vectoriel de F , $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E .

c Noyau et image

Définition 15 : Noyau et image

- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
- Le **noyau** de u est

$$\text{Ker } u = u^{-1}(\{\vec{0}_F\}) = \{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_F\} \in \mathcal{P}(E).$$
 - L'**image** de u est

$$\text{Im } u = u(E) = \{u(\vec{x}) \mid \vec{x} \in E\} \in \mathcal{P}(F).$$

Propriété 22

- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
- (i) $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont des sous-espaces vectoriels de F et E respectivement.
 - (ii) u est injective si et seulement si $\text{Ker } u = \{\vec{0}_E\}$.
 - (iii) u est surjective si et seulement si $\text{Im } u = F$.
 - (iv) Si E' est un sous-espace vectoriel de E , alors
 $\text{Ker}(u|_{E'}) = E' \cap \text{Ker } u$ et $\text{Im}(u|_{E'}) = u(E')$.

d Rang

Propriété 23

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E ou F de dimension finie.
 Alors $\text{Im } u$ est de dimension finie au plus $\min(\dim E, \dim F)$.

Définition 16 : Rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E ou F de dimension finie.
 On appelle **rang** de u l'entier $\text{rg } u = \dim(\text{Im } u)$.
 Si \mathcal{B} est une base de E , alors $\text{rg } u = \text{rg}(u(\mathcal{B}))$.

Propriété 24 : Effet sur le rang de la composition par un isomorphisme

On ne change pas le rang en composant à gauche ou à droite par un isomorphisme.

2 Endomorphismes

a Structure d'algèbre

Propriété 25

$(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre non commutative et non intègre si $\dim E \geq 2$.

Notation 1

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, on note $uv = u \circ v$, $u^n = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_n$
 pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u^0 = \text{id}_E$.

Définition 17 : Polynôme en un endomorphisme

Si $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on peut définir
 $P(u) = a_0 \text{id}_E + a_1 u + \dots + a_n u^n$.
 Lorsque $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de u .



Propriété 26

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot) \rightarrow (\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est un morphisme de \mathbb{K} -algèbres.

$P \mapsto P(u)$

⚠ En particulier, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Propriété 27 : Binôme

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$$

b Groupe linéaire

Définition 18 : Groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$ appelé **groupe linéaire de E** .

Propriété 28

$(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

Méthode 7 : Montrer l'inversibilité et trouver l'inverse avec un polynôme annulateur

Lorsque l'on a un polynôme P annulateur de u ayant un coefficient constant, on isole le terme id_E dans un membre et on factorise par u dans l'autre : on obtient alors $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u = \text{id}_E$ ce qui donne l'inversibilité, et l'expression de l'inverse sous forme de polynôme en u .

c Projecteurs

Définition 19 : Projection

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur \vec{x} de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **projection (ou projecteur) sur F parallèlement à G** l'application

$$p: \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x}_F \end{cases}$$

On définit de même la projection q sur G parallèlement à F .

On dit que les projections p et q sont **associées**.

Propriété 29

Avec les notations ci-dessus :

- $p, q \in \mathcal{L}(E)$
- $p + q = \text{id}_E$
- $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Propriété 30 : Caractérisation

p est une projection (vectorielle) sur E si et seulement si $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p \circ p = p$.

Dans ce cas,

- (i) $\text{Im } p \oplus \text{Ker } p = E$
- (ii) p est la projection sur $F = \text{Im } p = \text{Inv } p = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ parallèlement à $G = \text{Ker } p$

Méthode 8 : Étude d'une projection

Reconnaître et étudier une projection, c'est

- vérifier que $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$ pour un endomorphisme, ou $p^2 = p$ pour une matrice.
- Chercher $F = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker } p$.

d Symétries

Définition 20 : Symétrie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur \vec{x} de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **symétrie sur F parallèlement à G** l'application s :

$$s: \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x}_F - \vec{x}_G \end{cases} \text{ ie } s = p - q \text{ avec les notations précédentes.}$$

Propriété 31

- (i) $s \in \mathcal{L}(E)$
- (ii) Si p projection sur F parallèlement à G , $s = 2p - \text{id}_E$.

Propriété 32 : Caractérisation

s est une symétrie (vectorielle) sur E si et seulement si $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s^2 = s \circ s = \text{id}_E$.

Dans ce cas,

- (i) $\text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E) = E$
- (ii) s est la projection sur $F = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$



Méthode 9 : Étude d'une symétrie

Reconnaître et étudier une symétrie, c'est

1. vérifier que $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \text{id}_E$ pour un endomorphisme, ou $S^2 = I_n$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

3 Détermination d'une application linéaire

a Image d'une base

Propriété 33 : Linéarité des formes i^{e} coordonnées

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de E . Pour $\vec{x} \in E$, on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans \mathcal{B} .

Alors pour tout $i \in I$, l'application

$$\varphi_i : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & x_i \end{cases} \text{ est une forme linéaire (} i^{\text{e}} \text{ coordonnée).}$$

Propriété 34 : Caractérisation par l'image d'une base

Soient E, F deux espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de E et $\mathcal{F} = (\vec{f}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F .

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I, u(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$.

Corollaire 6

Soit \mathcal{B} une base de E , $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $u = v$ si et seulement si $u(\mathcal{B}) = v(\mathcal{B})$.

Propriété 35

Soit \mathcal{B} une base de E , $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- u est injective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est libre.

- u est surjective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ engendre F .
- u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base de F .

b Applications linéaires et dimensions

Propriété 36

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\dim E = \dim F \iff E$ et F sont isomorphes.

Propriété 37

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors u est injective $\iff u$ est surjective $\iff u$ est bijective.

Propriété 38

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F = n$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) u isomorphisme
- (ii) u est inversible à gauche
- (iii) u est inversible à droite
- (iv) $\text{rg } u = n$

c Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Propriété 39

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

d Décomposition d'applications linéaires (MPI)

Théorème 4

Si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et pour tout $i, u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $i, u|_{E_i} = u_i$.



4 Théorème du rang

Théorème 5 : et formule du rang

$u \in \mathcal{L}(E, F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire H de $\text{Ker } u$ sur $\text{Im } u$.

Si, de plus, E est de dimension finie, $\dim E = \dim \text{Ker } u + \text{rg } u$.

Corollaire 7

Si E est de dimension finie, u est injective si et seulement si $\text{rg } u = \dim E$.

Si F est de dimension finie, u est surjective si et seulement si $\text{rg } u = \dim F$.

5 Formes linéaires et hyperplans

E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Définition 21 : Formes linéaires

On rappelle que les **formes linéaires** sont les $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et que (HP) $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est appelé **espace dual** de E .

Définition 22 : Hyperplan

On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace de E égal au noyau d'une forme linéaire non nulle de E .

Théorème 6 : Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) H est un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle : $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}, H = \text{Ker } \varphi$.)
- (ii) H est un supplémentaire de toute droite $D \not\subset H$.
- (iii) H est un supplémentaire d'une droite $D \not\subset H$.

Corollaire 8

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

$$\text{Ker } \varphi_1 = \text{Ker } \varphi_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \varphi_1 = \lambda \varphi_2.$$

Propriété 40 : Cas de la dimension finie

En dimension finie, les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.

Propriété 41 : Système d'équations d'un sous-espace

Si F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$ tels que $p < n$, alors F est l'intersection de $n - p$ hyperplans distincts.

IV SOLUTIONS DES PROBLÈMES LINÉAIRES (MP2I)

Définition 23 : Problème linéaire

Un **problème linéaire** est un problème conduisant à une équation du type $u(x) = b$ où $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$ un vecteur fixé, l'inconnue x étant un vecteur de E .

Propriété 42

L'ensemble des solutions de cette équation est

- soit vide (si $b \notin \text{Im } u$)
- soit un sous-espace affine de E de direction $\text{Ker } u$, donc de la forme

$$x_0 + \text{Ker } u$$

où x_0 est une solution particulière et $\text{Ker } u$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $u(x) = 0_F$.