4

Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I Structure d'espace vectoriel (MP2I)

1 Définition

Définition 1 : $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps. On appelle **loi de composition externe** sur E toute application

$$\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$$

On appelle **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** ou **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** tout triplet $(E, +, \cdot)$ tel que

- E est un ensemble, $+$ est une loi de composition interne sur E et $\cdot$ est une loi de composition externe sur E.
- $(E, +)$ est un groupe abélien d'élément neutre noté $\vec{0}_E$ ou 0_E.
- *Pseudo-distributivité à droite* :
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x} \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}.$$
- *Pseudo-distributivité à gauche* :
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}.$$
- *Pseudo-associativité* :
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall \vec{x} \in E, \quad (\lambda \times \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}).$$
- *Pseudo-élément neutre* : $\forall \vec{x} \in E, \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Définition 2 : Famille presque nulle, combinaison linéaire

On appelle **famille presque nulle** de scalaire tout famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle que $\lambda_i \neq 0$ pour un nombre fini de vecteurs seulement. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulles.

Si $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ sont des vecteurs de E, on appelle **combinaison linéaire** de $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$, tout vecteur de la forme $\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

La définition s'étend aux familles infinies de vecteurs en n'ayant qu'un nombre fini de scalaires non nuls : toute combinaison linéaire est nécessairement finie (d'où l'intérêt des familles presque nulles de scalaires).

Si $\mathscr{F} = (\vec{x}_i)_{i \in I}$, les combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{F}$ sont les $\sum_{i \in I} \lambda_i \vec{x}_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$.

Propriété 1 : Produit cartésien de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Si $\left(E, \underset{E}{+}, \underset{E}{\cdot}\right)$ et $\left(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot}\right)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors $(E \times F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec les lois coordonnée à coordonnée : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(\vec{x}, \vec{y}), (\vec{x}', \vec{y}') \in E \times F$,

$$(\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}', \vec{y}') = \left(\vec{x} \underset{E}{+} \vec{x}', \vec{y} \underset{F}{+} \vec{y}'\right)$$

$$\lambda \cdot (\vec{x}, \vec{y}) = \left(\lambda \underset{E}{\cdot} \vec{x}, \lambda \underset{F}{\cdot} \vec{y}\right)$$

Remarque

R1 – Se généralise, par récurrence, au produit de n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Propriété 2 : Fonctions à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Si X est un ensemble non vide et $\left(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot}\right)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(F^X, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les lois habituelles sur les fonctions : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in F^X$, alors

$$f + g : x \mapsto f(x) \underset{F}{+} g(x)$$

$$\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \underset{F}{\cdot} f(x)$$

Propriété 3 : Espaces vectoriels classiques

Sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

- $(\mathbb{K},+,\times)$,
- $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$,
- $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$,
- $(\mathbb{K}^D,+,\cdot)$ pour tout ensemble D,
- $(\mathbb{K}[X],+,\cdot)$,
- $(\mathbb{K}(X),+,\cdot)$.

$(\mathbb{C},+,\times)$ *est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et, plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$, alors $(\mathbb{L},+,\times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

2 Sous-espace vectoriel

Définition 3 : Sous-espace vectoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.

On dit que $(F,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque $\left(F,+_{|F^2},\cdot_{|\mathbb{K}\times F}\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 4 : Caractérisation deux sous-espaces vectoriels

F est un sous-espace vectoriel de E

$$\iff \begin{cases} F\neq\varnothing\ (0_E\in F) \\ \forall\,\vec{x},\vec{y}\in F,\quad \vec{x}+\vec{y}\in F \\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \forall\,\vec{x}\in F,\quad \lambda\vec{x}\in F \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F\neq\varnothing\ (0_E\in F) \\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \forall\,\vec{x},\vec{y}\in F,\quad \vec{x}+\lambda\vec{y}\in F \\ (F \text{ stable par combin. linéaires}) \end{cases}$$

3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété 5 : Intersection de sev

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque

R2 – $\boxed{F\cup G \text{ est un sous-espace de } E \text{ ssi } F\subset G \text{ ou } G\subset F.}$

Si $F\cup G$ est un sous-espace de E et si $F\not\subset G$, alors on a $\vec{x}\in F$ tel que $\vec{x}\notin G$ et si $\vec{y}\in G$, $\vec{x}+\vec{y}\in F\cup G$ car sous-espace et comme $\vec{x}=(\vec{x}+\vec{y})-\vec{y}\notin G$, $\vec{x}+\vec{y}\notin G$ donc $\vec{x}+\vec{y}\in F$ et $\vec{y}=(\vec{x}+\vec{y})-\vec{x}\in F$ donc $G\subset F$.

4 Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Définition 4 : Sous-espaces vectoriels engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A\subset E$.

On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

On le note $\operatorname{Vect} A$ ou $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} A$.

Si $F=\operatorname{Vect} A$, on dit que A **engendre** F ou que F est une **partie génératrice** de F.

Propriété 6 : Caractérisation d'un Vect

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A\subset E$. $\operatorname{Vect} A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\operatorname{Vect} A=\left\{\lambda_1\vec{x}_1+\cdots+\lambda_n\vec{x}_n\ ;\ n\in\mathbb{N}^*,\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\in A,\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}\right\}.$$

Remarque

R3 – Si A est finie, $A=\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p\}$, alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Vect} A=\operatorname{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p)&=\left\{\sum_{i=0}^{p}\lambda_i\vec{x}_i\ ;\ (\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p\right\}\\ &=\mathbb{K}\vec{x}_1+\cdots+\mathbb{K}\vec{x}_p.\end{aligned}$$

R4 – $\operatorname{Vect} A\subset F$ sev $\iff A\subset F\iff\forall\,\vec{x}\in A,\quad \vec{x}\in F$.

R5 – Si $A\subset B$, alors $\operatorname{Vect} A\subset\operatorname{Vect} B$.

Méthode 1 : Passer de famille génératrice à équations

On résout le système donné par le paramétrage traduisant le caractère générateur de la famille en égalant les coordonnées : il y a plus d'équations que d'inconnues.

Les premières servent à déterminer les paramètres du système, les autres formes des équations de notre sous-espace après élimination des paramètres.

Méthode 2 : Passer d'équations à famille génératrice

Pour passer d'une système d'équations décrivant un sous-espace vectoriel à une famille génératrice de celui-ci, on résout le système formé par les équations : certaines coordonnées vont alors s'exprimer en fonction d'autres qui vont devenir des paramètres et donner une famille génératrice.

Méthode 3 : Égalité de Vect

Pour montrer que $\mathrm{Vect}\,A = \mathrm{Vect}\,B$, on montre que

$$A \subset \mathrm{Vect}\,B$$

puis que

$$B \subset \mathrm{Vect}\,A.$$

5 Familles de vecteurs

Définition 5 : Familles liées, libres, génératrices, bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{F} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E^n$.

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **liée** (ses vecteurs sont dit **linéairement dépendants**) lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale de ses vecteurs égale au vecteur nul :

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}_E$$

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **libre** (ses vecteurs sont dit **linéairement indépendants**) lorsqu'elle n'est pas liée, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de ses vecteurs égale au vecteur nul est triviale : $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}_E \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = 0.$$

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **génératrice** de E (ou **engendre** E) lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i$$

c'est-à-dire $E = \mathrm{Vect}\,\mathscr{F}$.
- La famille $\mathscr{F}$ est une **base** de E lorsqu'elle est libre et génératrice dans E.

Toutes ces définitions s'étendent aux familles infinies, les combinaisons linéaires restant toujours finies (les suites de cœfficients $(\lambda_i)_i$ sont presque nulles).

Remarque

R6 – Les couples de vecteurs liés sont les couples de vecteurs colinéaires, les triplets de vecteurs liés sont les triplets de vecteurs coplanaires.

⚠ Non colinéaires deux à deux ne suffit pas !

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\vec{x} = (1,0,0)$, $\vec{y} = (0,1,0)$ et $\vec{z} = (1,1,0)$ sont non colinéaires deux à deux et pourtant, ils sont coplanaires donc linéairement dépendant.

R7 – ⚠ Dire que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires, c'est dire qu'il existe $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ tel que $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \vec{0}_E$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{y} = \lambda\vec{x}$ **OU** que $\vec{x} = \vec{0}_E$.

R8 – Une famille contenant $\vec{0}_E$ est toujours liée.

Méthode 4 : Montrer qu'une famille est liée

- Pour montrer qu'une famille est liée, on cherche une combinaison linéaire nulle non triviale de ses vecteurs.
- Cela peut parfois se faire par exemple en résolvant un système linéaire.
- On raisonne fréquemment par l'absurde et/ou par récurrence.
- On peut aussi utiliser un argument de dimension (s'il y a plus de vecteurs que la dimension, la famille est liée).

Méthode 5 : Montrer qu'une famille est libre

- Pour montrer qu'une famille est libre, on prend une combinaison linéaire nulle des vecteurs, et on montre qu'elle est triviale : tous les scalaires sont nuls.
- Il suffit aussi de concaténer des familles libres de vecteurs pris dans des sous-espaces en somme directe.
- On peut aussi, en dimension finie, utiliser un déterminant.
- Dans un espace préhilbertien, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- On verra dans le cours de réduction qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre.

Exemple

E 1 – La famille $(1, \cos, \sin, \cos(2\cdot), \sin(2\cdot))$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

E 2 – La famille $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Propriété 7 : Famille de polynômes à degrés étagés

*Toute famille de polynômes **non nuls** et à **degrés étagés** (c'est-à-dire deux à deux distincts) est libre.*

Exemple

E 3 – $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et plus généralement $((X-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont libres et même des bases de $\mathbb{K}[X]$.

Définition – Propriété 1 : Coordonnées

$\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E si et seulement si $\forall\, \vec{x} \in E,\ \exists!\,(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$. Le triplet $(x_1, \dots, x_n)$ est appelé n-uplet des **coordonnées** de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Cette définition s'étend au cas où $\mathscr{B}$ est infinie, les famille des coordonnées étant presque nulles.

Remarque

R 9 – Unicité = libre, existence = génératrice

Définition – Propriété 2 : Bases canonique

On a appelle **bases canoniques** de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_n, p(\mathbb{K})$ les familles

- $((0, \dots, 0, \underset{k^e}{\overset{\uparrow}{1}}, 0, \dots, 0))_{1\leqslant k\leqslant n}$,
- $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$,
- $\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$.

Remarque

R 10 – L'existence et l'unicité de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles fournissent des bases de $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$.

Propriété 8 : Sur-famille et sous-famille

Toute sur-famille d'une famille liée ou génératrice l'est encore.

Toute sous-famille d'une famille libre l'est encore.

Propriété 9

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y} \in E$.

- $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y})$ *libre* $\Longleftrightarrow \begin{cases} (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \text{ libre} \\ y \notin \operatorname{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \end{cases}$
- $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ *liée si et seulement s'il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $\vec{x}_{i_0} \in \operatorname{Vect}\left((\vec{x}_i)_{i\neq i_0}\right)$. Lorsque c'est le cas, on a alors*

$$\operatorname{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \operatorname{Vect}(\vec{x}_i)_{i\neq i_0}.$$

6 Sommes de sous-espaces vectoriels (MPI)

Définition 6 : Sommes de sev

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On note

$$F_1 + \ldots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i =$$

Ainsi,

$$\vec{x} \in \sum_{i=1}^{n} F_i \Longleftrightarrow$$

Remarque

R 11 – ⚠ $\mathbb{K}\vec{x}+\mathbb{K}\vec{y}\neq\mathbb{K}\left(\vec{x}+\vec{y}\right)$, en général.

R 12 – ⚠ $F+F=F$, $F-F=F$, si G est un sous-espace de F, $F+G=F$.

R 13 – si $\lambda\neq 0$, $\lambda F=F$.

R 14 – ⚠ En général, $(F+G)\cap H\neq F\cap H+G\cap H$. Exemple : trois droites coplanaires.

Propriété 10

(i) *Une somme de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

(ii) *Si $A_1,\dots,A_n$ sont des parties de E, alors*

$$\mathrm{Vect}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Vect}\,A_k.$$

7 Somme directe (MPI)

Définition 7 : Somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que $F_1,\dots,F_n$ sont en **somme directe** lorsque

On note alors

$$F_1+\cdots+F_n=F_1\oplus\cdots\oplus F_n=\bigoplus_{i=1}^{n}F_i.$$

Remarque

R 15 – Comme pour des ensembles disjoints, il n'y a pas de notation pour dire que des sous-espaces sont en somme directe. La notation désigne la somme des sous-espaces, en rappelant que celle-ci est directe.

Propriété 11 : Caractérisation

$F_1,\dots,F_n$ sont en somme directe si et seulement si

Propriété 12 : Cas de deux sous-espaces

Deux sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F\cap G=\{\vec{0}_E\}$.

⚠ *Le résultat est faux pour plus de deux sous-espaces.*

Exemple

E 4 – Dans $\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}(1,0)$, $G=\mathbb{R}(0,1)$ et $H=\mathbb{R}(1,1)$

8 Sous-espaces supplémentaires (MPI)

Définition 8 : Sous-espaces supplémentaires

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

F et G sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E=F\oplus G$ c'est-à-dire

$$\forall\,\vec{x}\in E,\quad \exists!\,(\vec{x}_F,\vec{x}_G)\in F\times G,\quad \vec{x}=\vec{x}_F+\vec{x}_G.$$

Remarque

R 16 – ⚠ Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire ! Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'en est **jamais** un ! (Pourquoi ?)

Propriété 13

(i) *F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F+G=E$ et $F\cap G=\{\vec{0}_E\}$.*

(ii) *Il n'y a pas unicité du supplémentaire en général.*

Méthode 6 : Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires

- Raisonner par analyse-synthèse : si on a une décomposition $x = a + b$, alors... $a = ...$ et $b = ...$ (unicité sous réserve d'existence), et réciproquement de tels a et b conviennent (d'où l'existence).
- Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ (en général plus facile) et $F + G = E$ (en général moins facile).
- En dimension finie, utiliser des bases (une concaténation de bases de chaque sev donne une base de l'espace entier, dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$) ou un argument de dimension $\dim F + \dim G = \dim E$ et, au choix, soit $F \cap G = \{0_E\}$, soit $F + G = E$: voir plus loin.
- Reconnaître les sous-espaces caractéristiques d'une symétrie ou d'une projection.
- Plus généralement, reconnaître les sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable (voir cours de réduction).
- Reconnaître, si F est de dimension finie dans un espace préhilbertien, une décomposition $F \oplus F^{\perp} = E$.

Exemple

E 5 – Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ les sous-espaces des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

E 6 – Les sous-espaces $B\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_{\deg B-1}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 9 : Sous-espaces supplémentaires

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que $F_1, \dots, F_n$ **sont supplémentaires dans** E lorsque

Exemple

E 7 – $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E si et seulement si les $\mathbb{K}\vec{e}_i$ sont supplémentaires dans E.

II Dimension finie (MP2I)

1 Espace de dimension finie

Définition 10 : Espace de dimension finie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, il est dit de **dimension infinie**.

Exemple

E 8 – $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie. Pourquoi ?

2 Dimension, bases extraites et incomplètes

Propriété 14 : Existence de bases et leur taille

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{\vec{0}_E\}$.

- *E possède des bases.*
- *Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments.*

Définition 11 : Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Si $E = \{\vec{0}_E\}$, on pose $\dim E = 0$.

Sinon, on note $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$) le nombre de vecteurs de toute base de E.

Exemple

E 9 – Calculer $\dim \mathbb{K}^n$, $\dim \mathbb{K}_n[X]$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_n[X]$.

On peut démontrer que si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ et que $\mathbb{L}$ est de dimension finie en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{L}$ est un espace de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \times \dim_{\mathbb{L}} E$.

Propriété 15 : Taille des familles libres ou génératrices

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs, toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

Corollaire 1

Toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs en dimension n est liée.

Théorème 1 : Caractérisation des bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{B}$ une famille finie de vecteurs de E.

*$\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si elle contient $n = \dim E$ vecteur et elle est libre **ou** génératrice.*

Théorème 2 : de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{\vec{0}_E\}$. De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Théorème 3 : de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. On peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E.

De plus, les vecteurs pour compléter peuvent être choisis dans n'importe quelle famille génératrice de E.

Corollaire 2

Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une sous-famille libre de $\mathscr{G}$.

Alors on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathscr{L}$ soit une sous-famille de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ soit une sous-famille $\mathscr{G}$.

3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Propriété 16 : Base et dimension d'un produit cartésien

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces de dimension finie, $E_1 \times \dots \times E_n$ l'est encore et $\dim E_1 \times \dots \times E_n = \dim E_1 + \dots + \dim E_n$.

Si E est de dimension finie, E^n l'est encore et $\dim E^n = n \dim E$.

4 Dimension des sous-espaces

Propriété 17 : dimension des sous-espaces

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace de E.

Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

*L'entier $\dim E - \dim F$ est appelé **codimension** de F dans E.*

Définition 12 : Droites, plans, hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Un sous-espace de dimension 1 est une **droite vectorielle** de E, un sous-espace de dimension 2 est un **plan vectoriel** de E, un sous-espace de codimension 1, donc de dimension $n-1$ est un **hyperplan** de E.

5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 13 : Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.

On appelle **rang** de $\mathscr{F}$ l'entier $\operatorname{rg}\mathscr{F} = \dim(\operatorname{Vect}\mathscr{F})$.

Remarque

R 17 – Si E est de dimension finie n, alors $\operatorname{rg}\mathscr{F} \leqslant n$.

Propriété 18 : Rang d'une sous-famille, caractérisation des familles libres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.

(i) *Si $\mathscr{F}'$ est une sous-famille de $\mathscr{F}$, $\operatorname{rg}\mathscr{F} \leqslant \operatorname{rg}\mathscr{F}$.*

(ii) *Si $\mathscr{F}$ est finie, $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si elle contient $\operatorname{rg}\mathscr{F}$ vecteurs.*

Remarque

R 18 – En dimension finie, la méthode du pivot de Gauß permet de déterminer le rang d'une famille de vecteurs.

6 Somme directe et supplémentaire (MPI)

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, et pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$F_i = \left\{P \in \mathbb{K}_n[X],\ \forall j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\},\ \ P(x_j) = 0\right\}.$$

Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}_n[X]$ tels que $\mathbb{K}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^{n} F_i$.

7 Formule de Grassmann

Propriété 19 : Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces de dimension finie.

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

III Applications linéaires (MP2I)

1 Généralités

a Définition

Définition 14 : Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$.

On dit que u est une **application linéaire** lorsque

$$\begin{cases} \forall \vec{x}, \vec{y} \in E,\ \ u(\vec{x}+\vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}) \\ \forall \vec{x} \in E,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ u(\vec{x}+\lambda\vec{y}) = u(\vec{x}) + \lambda u(\vec{y}).$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

- Si u est bijective, on parle d'**isomorphisme** (d'espaces vectoriels).
- Si $E = F$, on parle d'**endomorphisme** et on note $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,F)$.
- Si $E = F$ et u est bijective, on parle d'**automorphisme**.
- Si $u \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$, on dit que f est une **forme linéaire**.
- On note $\mathscr{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$ appelé **dual** de E l'ensemble des formes linéaires sur E.

Remarque

R 19 – Ne pas confondre E^* et $E \setminus \{0_E\}$.

R 20 – Une application linéaire est en particulier un morphisme de groupe de $(E,+)$ sur $(F,+)$.

Exemple

E 10 – Dérivation, intégration.

E 11 – Homothéties vectorielles

E 12 – Morphisme d'évaluation de E^D dans E.

E 13 – Morphisme des fonctions polynomiales associées aux polynômes.

E 14 – La trace sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

E 15 – La transposition sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vers $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

b Propriétés

Propriété 20

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

(i) $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

(ii) $\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in E,\ \ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{x}_i).$$

(iii) *Si A est une partie de E,* $u(\operatorname{Vect} A) = \operatorname{Vect}(u(A))$.

(iv) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, $u_{|E'} \in \mathscr{L}(E',F)$ (u induit une application linéaire sur E').*

(v) *Si u est bijective (isomorphisme) alors $u^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.*

(vi) *$(\mathscr{L}(E,F),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

(vii) *Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.*

(viii) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E et F' est un sous-espace vectoriel de F, $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*

c Noyau et image

Définition 15 : Noyau et image

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- Le **noyau** de u est

$$\operatorname{Ker} u = u^{-1}\left(\{\vec{0}_F\}\right) = \{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_F\} \in \mathscr{P}(E).$$

- L'**image** de u est

$$\operatorname{Im} u = u(E) = \left\{u(\vec{x})\ ;\ \vec{x} \in E\right\} \in \mathscr{P}(F).$$

Remarque

R 21 – L'image de u est en fait l'image de u vu comme simple fonction et le noyau de u est le noyau de u vu comme un morphisme de groupes additifs.

Propriété 21

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

(i) $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des sous-espaces vectoriels de F et E respectivement.

(ii) u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$.

(iii) u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.

(iv) Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $\operatorname{Ker}\left(u_{|E'}\right) = E' \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im}\left(u_{|E'}\right) = u(E')$.

d Rang

Propriété 22

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E ou F de dimension finie.

Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie au plus $\min(\dim E, \dim F)$.

Définition 16 : Rang

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, E ou F de dimension finie.

On appelle **rang** de u l'entier $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.

Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}\left(u(\mathscr{B})\right)$.

Remarque

R 22 – On a toujours $\operatorname{rg} u \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

Propriété 23

On ne change pas le rang en composant à gauche ou à droite par un isomorphisme.

2 Endomorphismes

a Structure d'algèbre

Propriété 24

$(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative et non intègre si $\dim E \geqslant 2$.

Notation 1

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$, on note $uv = u \circ v$, $u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u^0 = \mathrm{id}_E$.

Définition 17 : Polynôme en un endomorphisme

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on peut définir $P(u) = a_0 \,\mathrm{id}_E + a_1 u + \cdots + a_n u^n$.

Lorsque $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de u.

Propriété 25

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, l'application $\left|\begin{array}{ccc} (\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot) & \longrightarrow & (\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}\right.$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

⚠ *En particulier, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.*

Remarque

R 23 – Deux polynômes en u commutent.

Propriété 26 : Binôme

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$$

b Groupe linéaire

Définition 18 : Groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathscr{GL}(E)$ appelé **groupe linéaire de E.**

Propriété 27

$(\mathscr{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

Méthode 7 : Montrer l'inversibilité et trouver l'inverse avec un polynôme annulateur

Lorsque l'on a un polynôme P annulateur de u ayant un cœfficient constant, on isole le terme id_E dans un membre et on factorise par u dans l'autre : on obtient alors $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u = \mathrm{id}_E$ ce qui donne l'inversibilité, et l'expression de l'inverse sous forme de polynôme en u.

Exercice 2 : CCINP 62 (sauf 2.b)

c Projecteurs

Définition 19 : Projection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **projection** (ou **projecteur**) **sur F parallèlement à G** l'application

$$p : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F \end{array} \right.$$

On définit de même la projection q sur G parallèlement à F.

On dit que les projections p et q sont **associées.**

Propriété 28

Avec les notations ci-dessus :

- $p, q \in \mathscr{L}(E)$
- $p+q = \mathrm{id}_E$
- $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Propriété 29 : Caractérisation

p est une projection (vectorielle) sur E si et seulement si $p \in (E)$ et $p^2 = p \circ p = p$.

Dans ce cas,

(i) $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$

(ii) *p est la projection sur*

$$F = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Inv}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$$

parallèlement à $G = \mathrm{Ker}\, p$

Remarque

R 24 – A savoir retrouver sur un dessin.

R 25 – On retiendra que

$$\vec{x} \in F = \mathrm{Im}\, p \iff \vec{x} \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \iff p(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Exemple

E 16 – Projection sur $\mathscr{P}$ (fonctions paires) parallèlement à $\mathscr{I}$ (fonctions impaires) ?

Méthode 8 : Étude d'une projection

Reconnaître et étudier une projection, c'est

1. vérifier que $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$ pour un endomorphisme, ou $P^2 = P$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\, p$.

d Symétries

Définition 20 : Symétrie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **symétrie sur F parallèlement à G** l'application $s : \begin{array}{|ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F - \vec{x}_G \end{array}$ ie $s = p - q$ avec les notations précédentes.

Propriété 30

(*i*) $s \in \mathscr{L}(E)$

(*ii*) *Si p projection sur F parallèlement à G,* $s = 2p - \mathrm{id}_E$.

Propriété 31 : Caractérisation

s est une symétrie (vectorielle) sur E si et seulement si $s \in (E)$ et $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Dans ce cas,

(*i*) $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = E$

(*ii*) *s est la projection sur $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$*

Remarque

R 26 – Si $F = \{\vec{0}_E\}$, alors $G = E$ et $s = -\mathrm{id}_E$: symétrie centrale.

Méthode 9 : Étude d'une symétrie

Reconnaître et étudier une symétrie, c'est

1. vérifier que $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{id}_E$ pour un endomorphisme, ou $S^2 = I_n$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(p + \mathrm{id}_E)$.

3 Détermination d'une application linéaire

a Image d'une base

Propriété 32 : Linéarité des formes i^{e} coordonnée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (\vec{e}_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour $\vec{x} \in E$, on note $(x_i)_{i\in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.

Alors pour tout $i \in I$, l'application $\varphi_i : \begin{array}{|ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & x_i \end{array}$ est une forme linéaire (i^{e} coordonnée).

Propriété 33 : Caractérisation par l'image d'une base

Soient E, F deux espaces vectoriels, $\mathscr{B} = (\vec{e}_i)_{i\in I}$ une base de E et $\mathscr{F} = \left(\vec{f}_i\right)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall\, i \in I,\ u(\vec{e}_i) = f_i$.

Corollaire 3

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $u = v$ si et seulement si $u(\mathscr{B}) = v(\mathscr{B})$.

Propriété 34

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

- *u est injective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est libre.*
- *u est surjective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ engendre F.*
- *u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est une base de F.*

Remarque

R 27 – $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

b Applications linéaires et dimensions

Propriété 35

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\dim E = \dim F \iff E$ et F sont isomorphes.

Remarque

R 28 – L'étude de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^p$ se reporte sur tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p.

Propriété 36

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Alors u est injective $\iff u$ est surjective $\iff u$ est bijective.

Remarque

R 29 – C'est en particulier le cas pour tout endomorphisme en dimension finie.

Exemple : Interpolation de Lagrange

E 17 – $u \;:\; \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array}\right.$
où $x_0, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

Exercice 3 : CCINP 87

Exercice 4 : CCINP 90

Propriété 37

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F = n$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalents :

(i) *u isomorphisme*

(ii) *u est inversible à gauche*

(iii) *u est inversible à droite*

(iv) $\operatorname{rg} u = n$

c Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$

Propriété 38

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Remarque

R 30 – ⚠ $\mathscr{L}(E)$ est de dimension $(\dim E)^2$.

d Décomposition d'applications linéaires (MPI)

Théorème 4

Si $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et pour tout i, $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$, alors

4 Théorème du rang

Théorème 5 : et formule du rang

$u \in \mathscr{L}(E,F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire H de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$.

Si, de plus, E est de dimension finie, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$.

Remarque

R 31 – ⚠ En général, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas supplémentaires.

Exemple

E 18 – $u : (x,y) \mapsto (y,0)$

Corollaire 4

Si E est de dimension finie, u est injective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim E$.

Si F est de dimension finie, u est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim F$.

Exercice 5 : CCINP 64

Exercice 6 : CCINP 93 : question 1

Exercice 7 : CCINP 60

5 Formes linéaires et hyperplans

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 21 : Formes linéaires

On rappelle que les **formes linéaires** sont les $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et que (HP) $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est appelé **espace dual** de E.

Remarque

R 32 – En dimension finie, $\dim E^* = \dim E$.

Définition 22 : Hyperplan

On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace de E égal au noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

Théorème 6 : Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *H est un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle : $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\},\quad H = \operatorname{Ker} \varphi$.)*

(ii) *H est un supplémentaire de toute droite $D \not\subset H$.*

(iii) *H est un supplémentaire d'une droite $D \not\subset H$.*

Corollaire 5

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

$$\operatorname{Ker} \varphi_1 = \operatorname{Ker} \varphi_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\quad \varphi_1 = \lambda \varphi_2.$$

Propriété 39 : Cas de la dimension finie

En dimension finie, les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.

Remarque : Équation d'un hyperplan

R 33 – Si $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E et $H = \operatorname{Ker} \varphi$ un hyperplan.

Pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ donc

$$\varphi(\vec{x}) = x_1\varphi(\vec{e}_1) + \cdots + x_n\varphi(\vec{e}_n).$$

Si on note $a_i = \varphi(\vec{e}_i)$, on obtient

$$\vec{x} \in H \iff a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Réciproquement, toute équation de H donne une telle forme linéaire φ.

La propriété précédente nous dit que toutes les équations de H sont colinéaires.

Propriété 40 : Système d'équations d'un sous-espace

Si F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$ tels que $p < n$, alors F est l'intersection de $n-p$ hyperplans distincts.

Remarque

R 34 – Cela traduit le fait que le sous-espace puisse être décrit par un système de $n-p$ équations indépendantes.

IV SOLUTIONS DES PROBLÈMES LINÉAIRES (MP2I)

Définition 23 : Problème linéaire

Un **problème linéaire** est un problème conduisant à une équation du type $u(x)=b$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$ un vecteur fixé, l'inconnue x étant un vecteur de E.

Propriété 41

L'ensemble des solution de cette équation est

- *soit vide (si $b \notin \operatorname{Im} u$)*
- *soit un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} u$, donc de la forme*

$$x_0 + \operatorname{Ker} u$$

où x_0 est une solution particulière et $\operatorname{Ker} u$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $u(x)=0_F$.

Exemple

E 19 – Équations différentielles linéaires

E 20 – Suites arithmético-géométriques.

E 21 – Systèmes linéaires.

E 22 – Interpolation de Lagrange

$$u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0),\dots,P(x_n)) \end{array}\right.$$

Connaissant une solution P_0, l'ensemble des solutions est $P_0 + \operatorname{Ker} u$.