4

Espaces vectoriels et applications linéaires

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Compléments d'algèbre linéaire	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.	Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe.
Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	Base adaptée à une décomposition en somme directe.
Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\mid E_i} = u_i$ pour tout i.	
~~Matrices définies par blocs.~~	~~Interprétation géométrique des blocs.~~
~~Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).~~	~~La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible.~~ ~~Transvections par blocs. Invariance du déterminant.~~
~~Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.~~	

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I Structure d'espace vectoriel (MP2I)

1 Définition

Définition 1 : $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps. On appelle **loi de composition externe** sur E toute application

$$\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array} \right.$$

On appelle **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** ou **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** tout triplet $(E,+,\cdot)$ tel que

- E est un ensemble, $+$ est une loi de composition interne sur E et $\cdot$ est une loi de composition externe sur E.
- $(E,+)$ est un groupe abélien d'élément neutre noté $\vec{0}$ ou 0_E.
- *Pseudo-distributivité à droite* :
$$\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{K},\quad \forall\,\vec{x}\in E,\quad (\lambda+\mu)\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x}.$$
- *Pseudo-distributivité à gauche* :
$$\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \forall\,\vec{x},\vec{y}\in E,\quad \lambda\cdot\left(\vec{x}+\vec{y}\right) = \lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}.$$
- *Pseudo-associativité* :
$$\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{K},\quad \forall\,\vec{x}\in E,\quad (\lambda\times\mu)\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\left(\mu\cdot\vec{x}\right).$$
- *Pseudo-élément neutre* : $\forall\,\vec{x}\in E,\quad 1_{\mathbb{K}}\cdot\vec{x}=\vec{x}$.

Définition 2 : Famille presque nulle, combinaison linéaire

On appelle **famille presque nulle** de scalaire tout famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $\lambda_i\neq 0$ pour un nombre fini de vecteurs seulement. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulles.

Si $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ sont des vecteurs de E, on appelle **combinaison linéaire** de $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$, tout vecteur de la forme $\lambda_1\vec{x}_1+\cdots+\lambda_n\vec{x}_n$ où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$.

La définition s'étend aux familles infinies de vecteurs en n'ayant qu'un nombre fini de scalaires non nuls : toute combinaison linéaire est nécessairement finie (d'où l'intérêt des familles presque nulles de scalaires).

Si $\mathscr{F}=(\vec{x}_i)_{i\in I}$, les combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{F}$ sont les $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i\vec{x}_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}$.

Propriété 1 : Produit cartésien de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Si $\left(E,\underset{E}{+},\underset{E}{\cdot}\right)$ et $\left(F,\underset{F}{+},\underset{F}{\cdot}\right)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors $(E\times F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec les lois coordonnée à coordonnée : si $\lambda\in\mathbb{K}$ et $(\vec{x},\vec{y}),(\vec{x}',\vec{y}')\in E\times F$,

$$(\vec{x},\vec{y})+(\vec{x}',\vec{y}') = \left(\vec{x}\underset{E}{+}\vec{x}',\vec{y}\underset{F}{+}\vec{y}'\right)$$

$$\lambda\cdot(\vec{x},\vec{y}) = \left(\lambda\underset{E}{\cdot}\vec{x},\lambda\underset{F}{\cdot}\vec{y}\right)$$

Remarque

R 1 – Se généralise, par récurrence, au produit de n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E_1\times\cdots\times E_n$.

Démonstration

Les propriétés sont héritées directement de celles de E et de F : il suffit de les écrire.
On a en particulier $0_{E\times F} = (0_E, 0_F)$. ■

Propriété 2 : Fonctions à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Si X est un ensemble non vide et $\left(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot}\right)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(F^X, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les lois habituelles sur les fonctions : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in F^X$, alors

$$f + g : x \mapsto f(x) \underset{F}{+} g(x)$$

$$\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \underset{F}{\cdot} f(x)$$

Démonstration

De nouveau, les propriétés sont héritées directement de celles de F : il suffit de les écrire.
On a en particulier 0_{F^X} est la fonction constamment égale à 0_F. ■

Propriété 3 : Espaces vectoriels classiques

Sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

- $(\mathbb{K}, +, \times)$,
- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
- $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$,
- $\left(\mathbb{K}^D, +, \cdot\right)$ *pour tout ensemble* D,
- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$,
- $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$.

$(\mathbb{C}, +, \times)$ *est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et, plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$, alors* $(\mathbb{L}, +, \times)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Démonstration

(i) $\lambda\vec{x} = \lambda\left(\vec{x} - \vec{y} + \vec{y}\right) = \lambda\left(\vec{x} - \vec{y}\right) + \lambda\vec{y}$.

(ii) $\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{x} - \vec{x}) = \lambda\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$.

(iii) $\lambda\vec{x} = (\lambda - \mu + \mu)\vec{x} = (\lambda - \mu)\vec{x} + \mu\vec{x}$.

(iv) $0_{\mathbb{K}} \cdot \vec{x} = (\lambda - \lambda)\vec{x} = \lambda\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$.

(v) $\vec{0} = 0_{\mathbb{K}}\vec{x} = (\lambda - \lambda)\vec{x} = \lambda\vec{x} + (-\lambda)\vec{x}$
et $\vec{0} = \lambda\vec{0} = \lambda(\vec{x} - \vec{x}) = \lambda\vec{x} + \lambda(-\vec{x})$.

(vi) ($\Leftarrow$) déjà vu et ($\Rightarrow$) : si $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$ et $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors λ est inversible et $\vec{0} = \lambda^{-1}(\lambda\vec{x}) = \left(\lambda^{-1}\lambda\right)\vec{x} = \vec{x}$. ■

2 Sous-espace vectoriel

Définition 3 : Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.
On dit que $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque $\left(F, +_{|F^2}, \cdot_{|\mathbb{K}\times F}\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 4 : Caractérisation des sous-espaces vectoriels

F est un sous-espace vectoriel de E

$$\iff \begin{cases} F \neq \varnothing \ (0_E \in F) \\ \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x}+\vec{y} \in F \\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall\, \vec{x} \in F, \quad \lambda\vec{x} \in F \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F \neq \varnothing \ (0_E \in F) \\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in F, \quad \vec{x}+\lambda\vec{y} \in F \\ (F \text{ stable par combin. linéaires}) \end{cases}$$

Démonstration

Comme pour les sous-groupes et les sous-anneaux : les propriétés sont hérités de celles sur E, seule la stabilité de F par combinaisons linéaires est nécessaire. ■

Démonstration

C'est en effet une partie non vide de $\mathbb{K}[X]$ stable par combinaison linéaire. ■

3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété 5 : Intersection de sev

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

C'est en effet une partie non vide de E (continent 0_E) stable par combinaison linéaire (car les F_i le sont). ■

Remarque

R 2 – $\boxed{F \cup G \text{ est un sous-espace de } E \text{ ssi } F \subset G \text{ ou } G \subset F.}$

Si $F\cup G$ est un sous-espace de E et si $F \not\subset G$, alors on a $\vec{x} \in F$ tel que $\vec{x} \notin G$ et si $\vec{y} \in G$, $\vec{x}+\vec{y} \in F\cup G$ car sous-espace et comme $\vec{x} = (\vec{x}+\vec{y}) - \vec{y} \notin G$, $\vec{x}+\vec{y} \notin G$ donc $\vec{x}+\vec{y} \in F$ et $\vec{y} = (\vec{x}+\vec{y}) - \vec{x} \in F$ donc $G \subset F$.

4 Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Définition 4 : Sous-espaces vectoriels engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A \subset E$.

On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

On le note $\mathrm{Vect}\, A$ ou $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\, A$.

Si $F = \mathrm{Vect}\, A$, on dit que A **engendre** F ou que F est une **partie génératrice** de F.

Propriété 6 : Caractérisation d'un Vect

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A \subset E$. $\operatorname{Vect} A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\operatorname{Vect} A = \{\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

Démonstration

(i) $\bigcap\limits_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$ est bien un sous-espace vectoriel contenant A.

Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel contenant A alors il contient $\bigcap\limits_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$.

Il s'agit bien du plus petit sus-espace vectoriel contenant A.

(ii) On vérifie facilement que $\{\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel contenant A par caractérisation.

Réciproquement, tout sous-espace vectoriel contenant A contient nécessairement $\{\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$. ■

Remarque

R 3 – Si A est finie, $A = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$, alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Vect} A = \operatorname{Vect}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) &= \left\{ \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \vec{x}_i \ ; \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\} \\ &= \mathbb{K}\vec{x}_1 + \cdots + \mathbb{K}\vec{x}_p.\end{aligned}$$

R 4 – $\operatorname{Vect} A \subset F$ sev $\iff A \subset F \iff \forall \vec{x} \in A, \quad \vec{x} \in F$.

R 5 – Si $A \subset B$, alors $\operatorname{Vect} A \subset \operatorname{Vect} B$.

Méthode 1 : Passer de famille génératrice à équations

On résout le système donné par le paramétrage traduisant le caractère générateur de la famille en égalant les coordonnées : il y a plus d'équations que d'inconnues.

Les premières servent à déterminer les paramètres du système, les autres formes des équations de notre sous-espace après élimination des paramètres.

Méthode 2 : Passer d'équations à famille génératrice

Pour passer d'une système d'équations décrivant un sous-espace vectoriel à une famille génératrice de celui-ci, on résout le système formé par les équations : certaines coordonnées vont alors s'exprimer en fonction d'autres qui vont devenir des paramètres et donner une famille génératrice.

Méthode 3 : Égalité de Vect

Pour montrer que $\operatorname{Vect} A = \operatorname{Vect} B$, on montre que

$$A \subset \operatorname{Vect} B$$

puis que

$$B \subset \operatorname{Vect} A.$$

Démonstration

Tout cela repose sur le fait que $\operatorname{Vect} A$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A. ■

5 Familles de vecteurs

Définition 5 : Familles liées, libres, génératrices, bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$.

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **liée** (ses vecteurs sont dit **linéairement dépendants**) lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale de ses vecteurs égale au vecteur nul :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}$$

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **libre** (ses vecteurs sont dit **linéairement indépendants**) lorsqu'elle n'est pas liée, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de ses vecteurs égale au vecteur nul est triviale : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0} \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = 0.$$

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **génératrice** de E (ou **engendre** E) lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i$$

c'est-à-dire $E = \operatorname{Vect} \mathscr{F}$.
- La famille $\mathscr{F}$ est une **base** de E lorsqu'elle est libre et génératrice dans E.

Toutes ces définitions s'étendent aux familles infinies, les combinaisons linéaires restant toujours finies (les suites de cœfficients $(\lambda_i)_i$ sont presque nulles).

Remarque

R 6 – Les couples de vecteurs liés sont les couples de vecteurs colinéaires, les triplets de vecteurs liés sont les triplets de vecteurs coplanaires.

⚠ Non colinéaires deux à deux ne suffit pas !

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\vec{x} = (1, 0, 0)$, $\vec{y} = (0, 1, 0)$ et $\vec{z} = (1, 1, 0)$ sont non colinéaires deux à deux et pourtant, ils sont coplanaires donc linéairement dépendant.

R 7 – ⚠ Dire que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires, c'est dire qu'il existe $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} = \vec{0}$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ **OU** que $\vec{x} = \vec{0}$.

R 8 – Une famille contenant $\vec{0}$ est toujours liée.

Méthode 4 : Montrer qu'une famille est liée

- Pour montrer qu'une famille est liée, on cherche une combinaison linéaire nulle non triviale de ses vecteurs.
- Cela peut parfois se faire par exemple en résolvant un système linéaire.
- On raisonne fréquemment par l'absurde et/ou par récurrence.
- On peut aussi utiliser un argument de dimension (s'il y a plus de vecteurs que la dimension, la famille est liée).

Méthode 5 : Montrer qu'une famille est libre

- Pour montrer qu'une famille est libre, on prend une combinaison linéaire nulle des vecteurs, et on montre qu'elle est triviale : tous les scalaires sont nuls.
- Il suffit aussi de concaténer des familles libres de vecteurs pris dans des sous-espaces en somme directe.
- On peut aussi, en dimension finie, utiliser un déterminant.
- Dans un espace préhilbertien, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- On verra dans le cours de réduction qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre.

Exemple

E 1 – La famille $(1, \cos, \sin, \cos(2\cdot), \sin(2\cdot))$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

E 2 – La famille $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Propriété 7 : Famille de polynômes à degrés étagés

*Toute famille de polynômes **non nuls** et à **degrés étagés** (c'est-à-dire deux à deux distincts) est libre.*

Démonstration

Si $F = (P_1, \dots, P_n)$ famille de polynômes non nuls à degrés étagés, avec $\deg P_i < \deg P_{i+1}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Si, par l'absurde, l'un des λ_i n'est pas nul, soit $p = \max\{i \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}$. Alors

$$-\lambda_p P_p = \underbrace{\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{p-1} P_{p-1}}_{\deg < \deg P_p}$$

avec $\lambda_p \neq 0$, ce qui est contradictoire. Donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et la famille est libre.

La démonstration s'étend au cas des familles infinies, les combinaisons linéaires étant toujours finies. ■

Exemple

E 3 – $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et plus généralement $((X-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont libres et même des bases de $\mathbb{K}[X]$.

Définition – Propriété 1 : Coordonnées

$\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E si et seulement si $\forall \vec{x} \in E,\ \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ \ \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$. Le triplet $(x_1, \dots, x_n)$ est appelé n-uplet des **coordonnées** de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Cette définition s'étend au cas où $\mathscr{B}$ est infinie, les famille des coordonnées étant presque nulles.

Remarque

R 9 – Unicité = libre, existence = génératrice

Démonstration

Le caractère générateur équivaut à l'existence.

S'il y a unicité, pour $\vec{x} = \vec{0}$, on trouve que $\mathscr{B}$ est libre.

Si, réciproquement, $\mathscr{B}$ est libre, et si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(x'_1, \dots, x'_n)$ conviennent, alors $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i)\vec{e}_i = \vec{0}$ donc pour tout i, $x_i = x'_i$ car $\mathscr{B}$ est libre. ■

Définition – Propriété 2 : Bases canonique

On a appelle **bases canoniques** de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les familles

- $\big((0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ k^e}}{1},0,\dots,0)\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$,
- $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\left(1,X,X^2,\dots,X^n\right)$,
- $\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$.

Remarque

R 10 – L'existence et l'unicité de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles fournissent des bases de $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$.

Propriété 8 : Sur-famille et sous-famille

Toute sur-famille d'une famille liée ou génératrice l'est encore.
Toute sous-famille d'une famille libre l'est encore.

Démonstration

Si $\mathscr{F}$ sous-famille de $\mathscr{F}'$, alors

- si $\mathscr{F}$ est liée, on a une combinaison linéaire non triviale de vecteurs de $\mathscr{F}$ donc de $\mathscr{F}'$ égale au vecteur nul.
- si $\mathscr{F}$ est génératrice, tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{F}$ donc de $\mathscr{F}'$. ■

Démonstration

Si $\mathscr{L}$ est libre et $\mathscr{L}'$ est une sous-famille de $\mathscr{L}$, alors si $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ sont des vecteurs de $\mathscr{L}$,

$$\lambda_1\vec{x}_1+\cdots+\lambda_n\vec{x}_n=\vec{0}\Longrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$$

donc en particulier, si $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ sont des vecteurs de $\mathscr{L}'$,

$$\lambda_1\vec{x}_1+\cdots+\lambda_n\vec{x}_n=\vec{0}\Longrightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0.$$ ■

Propriété 9

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n\in\mathbb{N}^*$, $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{y}\in E$.

- $\left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{y}\right)$ *libre* $\Longleftrightarrow\begin{cases}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\text{ libre}\\ y\notin\operatorname{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)\end{cases}$
- $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ *liée si et seulement s'il existe* $i_0\in[\![1,n]\!]$ *tel que* $\vec{x}_{i_0}\in\operatorname{Vect}\left((\vec{x}_i)_{i\neq i_0}\right)$.
  Lorsque c'est le cas, on a alors
  $$\operatorname{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)=\operatorname{Vect}(\vec{x}_i)_{i\neq i_0}.$$

Démonstration

- $(\Longrightarrow)$ si $\left(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n,\vec{y}\right)$, alors la sous-famille $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ l'est aussi et $y\notin\operatorname{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ sinon la famille serait liée.
- $(\Longleftarrow)$ si $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ est libre et $y\notin\operatorname{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$, alors si $\lambda_1\vec{x}_1+\cdots+\lambda_n\vec{x}_n+\mu\vec{y}=\vec{0}$, $\mu=0$ sinon $\vec{y}\in\operatorname{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$, puis $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$ car $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ est libre. ■

Démonstration

S'il existe $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $\vec{x}_{i_0}\in\operatorname{Vect}\left(\vec{x}_i\right)_{i\neq i_0}$, la contraposée de la propriété précédente nous dit que $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ est liée.

Réciproquement, si $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ est liée, on a une combinaison linéaire non triviale des $\vec{x}_i$ égale à $\vec{0}$, ce qui permet d'écrire l'un des $\vec{x}_i$ comme combinaison linéaire des autres.

Enfin, on a évidemment que $\mathrm{Vect}(\vec{x}_i)_{i\neq i_0} \subset \mathrm{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ et réciproquement, si on a $\vec{x}_{i_0} \in \mathrm{Vect}(\vec{x}_i)_{i\neq i_0}$, alors pour tout i, $\vec{x}_i \in \mathrm{Vect}\left((\vec{x}_i)_{i\neq i_0}\right)$ donc $\mathrm{Vect}(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \subset \mathrm{Vect}(\vec{x}_i)_{i\neq i_0}$. ■

6 Sommes de sous-espaces vectoriels (MPI)

Définition 6 : Sommes de sev

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On note

$$F_1+\ldots+F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i = \{\vec{x}_1+\cdots+\vec{x}_n \mid \forall i,\ \ \vec{x}_i \in F_i\}.$$

Ainsi,

$$\vec{x} \in \sum_{i=1}^{n} F_i \Longleftrightarrow \exists\,(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in F_1\times\cdots\times F_n,\ \ \vec{x} = \vec{x}_1+\cdots+\vec{x}_n.$$

Remarque

R 11 – ⚠ $\mathbb{K}\vec{x}+\mathbb{K}\vec{y} \neq \mathbb{K}\,(\vec{x}+\vec{y})$, en général.

R 12 – ⚠ $F+F=F$, $F-F=F$, si G est un sous-espace de F, $F+G=F$.

R 13 – si $\lambda\neq 0$, $\lambda F = F$.

R 14 – ⚠ En général, $(F+G)\cap H \neq F\cap H + G\cap H$. Exemple : trois droites coplanaires.

Propriété 10

(i) *Une somme de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

(ii) *Si $A_1,\dots,A_n$ sont des parties de E, alors*

$$\mathrm{Vect}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Vect}\,A_k.$$

Démonstration

Caractérisation des sous-espaces et vérifications directes. ■

7 Somme directe (MPI)

Définition 7 : Somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que $F_1,\dots,F_n$ sont en **somme directe** lorsque pour tout $\vec{x}\in F_1+\cdots+F_n$, l'écriture $\vec{x}=\vec{x}_1+\cdots+\vec{x}_n$ où $\forall i,\ \ \vec{x}_i\in F_i$ est unique.

On note alors

$$F_1+\cdots+F_n = F_1\oplus\cdots\oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i.$$

Remarque

R 15 – Comme pour des ensembles disjoints, il n'y a pas de notation pour dire que des sous-espaces sont en somme directe. La notation désigne la somme des sous-espaces, en rappelant que celle-ci est directe.

Propriété 11 : Caractérisation

$F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si $\forall\ (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$,

$$\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0} \Longrightarrow \vec{x}_1 = \cdots = \vec{x}_n = \vec{0}.$$

Démonstration

Le sens $\Longrightarrow$ et immédiat (et sans intérêt), pour l'autre sens, si $\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{x}'_1 + \cdots + \vec{x}'_n$ avec pour tout i, $\vec{x}_i, \vec{x}'_i \in F_i$, alors $\underbrace{(\vec{x}_1 - \vec{x}'_1)}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{(\vec{x}_n - \vec{x}'_n)}_{\in F_n} = \vec{0}$ donc $(\vec{x}_1 - \vec{x}'_1) = \cdots = (\vec{x}_n - \vec{x}'_n) = \vec{0}$. ∎

Propriété 12 : Cas de deux sous-espaces

Deux sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
⚠ *Le résultat est faux pour plus de deux sous-espaces.*

Démonstration

Si F et G sont en somme directe et si $\vec{x} \in F \cap G$, $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} \in F \oplus G$ donc $\vec{x} = \vec{0}$ par unicité. On a aussi $\vec{0} \in F \cap G$ car c'est un sous-espace.

Réciproquement, si $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et si $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$, alors $\vec{x} = -\vec{y} \in F \cap G = \{\vec{0}\}$ donc $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$ donc F et G sont en somme directe. ∎

Exemple

E 4 – Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}(1,0)$, $G = \mathbb{R}(0,1)$ et $H = \mathbb{R}(1,1)$ sont tels que $(1,0) + (0,1) - (1,1) = (0,0)$. La somme n'est pas directe et pourtant $F \cap G = G \cap H = H \cap F = F \cap G \cap H = \{0\}$.

8 Sous-espaces supplémentaires (MPI)

Définition 8 : Sous-espaces supplémentaires

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
F et G sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$ c'est-à-dire

$$\forall\ \vec{x} \in E,\quad \exists!\ (\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in F \times G,\quad \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G.$$

Remarque

R 16 – ⚠ Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire ! Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'en est **jamais** un ! (Pourquoi ?)

Propriété 13

(i) *F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$.*

(ii) *Il n'y a pas unicité du supplémentaire en général.*

Méthode 6 : Montrer que des sous-espaces sont supplémentaires

- Raisonner par analyse-synthèse : si on a une décomposition $x = a+b$, alors... $a = \dots$ et $b = \dots$ (unicité sous réserve d'existence), et réciproquement de tels a et b conviennent (d'où l'existence).
- Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ (en général plus facile) et $F+G=E$ (en général moins facile).
- En dimension finie, utiliser des bases (une concaténation de bases de chaque sev donne une base de l'espace entier, dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$) ou un argument de dimension $\dim F + \dim G = \dim E$ et, au choix, soit $F \cap G = \{0_E\}$, soit $F + G = E$: voir plus loin.
- Reconnaître les sous-espaces caractéristiques d'une symétrie ou d'une projection.
- Plus généralement, reconnaître les sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable (voir cours de réduction).
- Reconnaître, si F est de dimension finie dans un espace préhilbertien, une décomposition $F \oplus F^{\perp} = E$.

Exemple

E 5 – Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ les sous-espaces des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

E 6 – Les sous-espaces $B\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_{\deg B-1}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 9 : Sous-espaces supplémentaires

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que $F_1, \dots, F_n$ **sont supplémentaires dans** E lorsque $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E$ c'est-à-dire

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \exists! \, (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \quad \vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n.$$

II Dimension finie (MP2I)

1 Espace de dimension finie

Définition 10 : Espace de dimension finie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, il est dit de **dimension infinie**.

Exemple

E 7 – $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie. Pourquoi ?

2 Dimension, bases extraites et incomplètes

Propriété 14 : Existence de bases et leur taille

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{\vec{0}\}$.
- *E possède des bases.*
- *Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments.*

Démonstration

- Un espace de dimension finie possède une famille génératrice finie et donc une base d'après le théorème précédent.
- Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, de taille n et n' respectivement. Comme $\mathscr{B}$ est libre et $\mathscr{B}'$ est génératrice,

le lemme nous dit que $n \leqslant n'$. Par symétrie, $n = n'$. ■

Définition 11 : Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Si $E = \{\vec{0}\}$, on pose $\dim E = 0$.
Sinon, on note $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$) le nombre de vecteurs de toute base de E.

Exemple

E 8 – Calculer $\dim \mathbb{K}^n$, $\dim \mathbb{K}_n[X]$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_n[X]$.
On peut démontrer que si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ et que $\mathbb{L}$ est de dimension finie en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{L}$ est un espace de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \times \dim_{\mathbb{L}} E$.

Propriété 15 : Taille des familles libres ou génératrices

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs, toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

Démonstration

Conséquence du lemme en considérant une base comme une famille libre puis comme une famille génératrice. ■

Corollaire 1

Toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs en dimension n est liée.

Théorème 1 : Caractérisation des bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{B}$ une famille finie de vecteurs de E.
*$\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si elle contient $n = \dim E$ vecteur et elle est libre **ou** génératrice.*

Démonstration

On pose $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.
Le sens direct ne pose pas de problème.
Si $\mathscr{B}$ est libre et contient $n = \dim E$ vecteurs, elle contient autant de vecteurs qu'une famille génératrice de E donc est une base d'après le lemme.
Si $\mathscr{B}$ est génératrice et contient n vecteurs, alors si $\mathscr{B}$ était liée, on aurait i tel que $\vec{e}_i \in \mathrm{Vect}\left(\vec{e}_k\right)_{k \neq i}$. Alors $\mathscr{B}' = \left(\vec{e}_k\right)_{k \neq i}$ serait encore génératrice et posséderait $n-1 < \dim E$ vecteurs, ce qui est contradictoire. ■

Remarque

R 17 – Dans la pratique, on montre que le famille est libre et possède le bon nombre de vecteurs.

Théorème 2 : de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{\vec{0}\}$. De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Démonstration

Soit $\mathscr{G}_0 = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une famille génératrice de E.

- Soit $\mathscr{G}_0$ est libre et c'est une base de E, c'est terminé.
- Soit $\mathscr{G}_0$ est liée, et on a i_0 tel que $\vec{v}_{i_0} \in \operatorname{Vect}(\vec{v}_i)_{i \neq i_0}$. Quitte à réordonner, on suppose $i_0 = n$. Soit $\mathscr{G}_1 = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p-1})$. Alors $E = \operatorname{Vect} \mathscr{G}_0 = \operatorname{Vect} \mathscr{G}_1$. On peut donc recommencer le raisonnement.

Le procédé s'arrête et on finit toujours par obtenir une base de E. ■

Théorème 3 : de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. On peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E.

De plus, les vecteurs pour compléter peuvent être choisis dans n'importe quelle famille génératrice de E.

Démonstration

Soit $\mathscr{L}$ et $\mathscr{G}$ familles libre et génératrice de E respectivement. Soit

$$A = \{\text{taille}(\mathscr{L}') \ ; \ \mathscr{L}' \text{ libre obtenue par complétion de } \mathscr{L} \text{ avec des vecteurs de } \mathscr{G}\}$$

$A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$ (contient la taille de $\mathscr{L}$) et majoré par $n = \dim E$. Donc A admet un plus grand élément. Soit $\mathscr{B}$ une famille libre obtenue par complétion de $\mathscr{L}$ avec des vecteurs de $\mathscr{G}$ réalisant ce maximum.

On a $\operatorname{Vect} \mathscr{B} \subset E = \operatorname{Vect} \mathscr{G}$.

Si on a $\vec{v} \in \mathscr{G}$ tel que $\vec{v} \notin \operatorname{Vect} \mathscr{B}$, alors la famille $\mathscr{L}'$ obtenue en ajoutant $\vec{v}$ à $\mathscr{B}$ est une famille libre obtenue par complétion de $\mathscr{L}$ avec des vecteurs de $\mathscr{G}$ ce qui contredit la maximalité de $\mathscr{B}$.

Donc $\mathscr{G} \subset \operatorname{Vect} \mathscr{B}$ donc $E = \operatorname{Vect} \mathscr{G} \subset \mathscr{B} \subset E$ donc $E = \operatorname{Vect} \mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ est une base de E. ■

Corollaire 2

Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une sous-famille libre de $\mathscr{G}$.

Alors on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathscr{L}$ soit une sous-famille de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ soit une sous-famille $\mathscr{G}$.

3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Propriété 16 : Base et dimension d'un produit cartésien

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces de dimension finie, $E_1 \times \dots \times E_n$ l'est encore et $\dim E_1 \times \dots \times E_n = \dim E_1 + \dots + \dim E_n$.

Si E est de dimension finie, E^n l'est encore et $\dim E^n = n \dim E$.

Démonstration

Tout couple $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$ s'écrit de manière unique

$$x_1(\vec{e}_1, 0_F) + \cdots + x_p(\vec{e}_p, 0_F) + y_1\left(0_E, \vec{f}_1\right) + \dots + y_n\left(0_E, \vec{f}_n\right).$$ ■

4 Dimension des sous-espaces

Propriété 17 : dimension des sous-espaces

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace de E.
Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.
L'entier $\dim E - \dim F$ est appelé ***codimension*** *de F dans E.*

Démonstration

Soit $F = \{\vec{0}\}$ et le résultat est direct.
Sinon, soit $A = \{\text{taille}(\mathscr{L})\ ;\ \mathscr{L}$ famille libre de vecteurs de $F\}$.
$A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$ (contient 1) et majoré par $n = \dim E$. Donc A admet un plus grand élément. Soit $\mathscr{B}$ une famille libre de vecteurs de F réalisant ce maximum.
On a $\operatorname{Vect}\mathscr{B} \subset F$.
Si on a $\vec{v} \in \mathscr{F}$ tel que $\vec{v} \notin \operatorname{Vect}\mathscr{B}$, alors la famille $\mathscr{L}$ obtenue en ajoutant $\vec{v}$ à $\mathscr{B}$ est une famille libre de vecteurs de F ce qui contredit la maximalité de $\mathscr{B}$.
Donc $F \subset \operatorname{Vect}\mathscr{B}$ donc $F = \operatorname{Vect}\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ est une base de F.
Comme $\mathscr{B}$ est une famille libre de vecteurs de E, $\dim F \leqslant \dim E$.
S'il y a égalité, alors $\mathscr{B}$ est une base de E, donc $F = \operatorname{Vect}\mathscr{B} = E$. ∎

Définition 12 : Droites, plans, hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Un sous-espace de dimension 1 est une **droite vectorielle** de E, un sous-espace de dimension 2 est un **plan vectoriel** de E, un sous-espace de codimension 1, donc de dimension $n-1$ est un **hyperplan** de E.

5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 13 : Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.
On appelle **rang** de $\mathscr{F}$ l'entier $\operatorname{rg}\mathscr{F} = \dim(\operatorname{Vect}\mathscr{F})$.

Remarque

R 18 – Si E est de dimension finie n, alors $\operatorname{rg}\mathscr{F} \leqslant n$.

Propriété 18 : Rang d'une sous-famille, caractérisation des familles libres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.

(i) *Si $\mathscr{F}'$ est une sous-famille de $\mathscr{F}$, $\operatorname{rg}\mathscr{F} \leqslant \operatorname{rg}\mathscr{F}$.*

(ii) *Si $\mathscr{F}$ est finie, $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si elle contient $\operatorname{rg}\mathscr{F}$ vecteurs.*

Démonstration

(i) $\operatorname{Vect}\mathscr{F}' \subset \operatorname{Vect}\mathscr{F}$.

(ii) $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si c'est une base de $\operatorname{Vect}\mathscr{F}$ si et seulement si elle contient $\dim(\operatorname{Vect}\mathscr{F}) = \operatorname{rg}\mathscr{F}$ vecteurs (car c'est bien sûr une famille génératrice). ∎

Remarque

R 19 – En dimension finie, la méthode du pivot de Gauß permet de déterminer le rang d'une famille de vecteurs.

6 Somme directe et supplémentaire (MPI)

Propriété 19 : Caractérisation de la supplémentarité avec des bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces de dimension finie, $\mathscr{B}_{F_i}$ une base de F_i, $\mathscr{C}$ la famille obtenue en mettant bout à bout les $\mathscr{B}_{F_i}$ (concaténation).

On a toujours que $\mathscr{C}$ engendre $H = F_1 + \dots + F_n$, et

les F_i sont en somme directe si et seulement si $\mathscr{C}$ est libre donc une base de H.

On dit alors que la base $\mathscr{C}$ de H est adaptée à la décomposition $H = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$.

On a alors $\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Démonstration

Pour deux sous-espaces, mais valable dans le cas général.

- $F + G = \operatorname{Vect} \mathscr{B}_F + \operatorname{Vect} \mathscr{B}_G = \operatorname{Vect} \mathscr{C}$ donc $\mathscr{C}$ engendre H.
- Si F et G sont en somme directe, alors on a déjà vu que $\mathscr{C}$ est libre : si

$$\underbrace{\lambda_1 \vec{f}_1 + \dots + \lambda_p \vec{f}_p}_{\in F} + \underbrace{\mu_1 \vec{g}_1 + \dots + \mu_q \vec{g}_q}_{\in G} = \vec{0}$$

  alors $\lambda_1 \vec{f}_1 + \dots + \lambda_p \vec{f}_p = \mu_1 \vec{g}_1 + \dots + \mu_q \vec{g}_q = \vec{0}$ car F et G sont en somme directe, donc tous les cœfficients sont nuls car $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ sont libres. Donc $\mathscr{C}$ l'est.
- Si $\mathscr{C}$ est libre, alors si $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$, comme $\vec{x}$ et $\vec{y}$ se décomposent dans $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ respectivement et comme $\mathscr{C}$ est libre, on obtient $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$ et F et G sont en somme directe. ■

Corollaire 3

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Démonstration

Avec les même notation que précédemment, $\mathscr{C}$ engendre $\sum_{i=1}^{n} F_i$ donc $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leqslant \text{taille}(\mathscr{C}) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

La propriété précédent nous dit qu'il y a égalité si et seulement si la somme est directe. ■

Corollaire 4 : Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces de E.
$F_1, \dots, F_n$ sont supplémentaires dans E (ie $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1. $E = F_1 + \dots + F_n$.
2. *La somme est directe.*
3. $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Remarque

R 20 – En particulier, pour deux sous-espaces, F et G sont supplémentaires dans E (ie $E = F \oplus G$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1. $E = F + G$.
2. $F \cap G = \{\vec{0}\}$
3. $\dim E = \dim F + \dim G$.

Démonstration

- Si 1 et 2 sont vrais, c'est la définition.
- Si 1 et 3 sont vrais, la somme est directe d'après la propriété précédente.
- Si 2 et 3 sont vrais, $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ est un sous-espace de E de même dimension, donc $F_1 \oplus \dots \oplus F_n = E$. ∎

Corollaire 5 : Existence et dimension des supplémentaires

Tout sous-espaces vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E admet un supplémentaire dans E.
De plus, si $p = \dim F$ et $n = \dim E$, tout supplémentaire de F est de codimension p, c'est-à-dire de dimension $n - p$.

Démonstration

Il suffit de compléter une base de F (famille libre) en une base de E (Théorème de la base incomplète). ∎

7 Formule de Grassmann

Propriété 20 : Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces de dimension finie.

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

III Applications linéaires (MP2I)

1 Généralités

a Définition

Définition 14 : Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$.
On dit que u est une **application linéaire** lorsque

$$\begin{cases} \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad u\left(\vec{x}+\vec{y}\right) = u(\vec{x}) + u(\vec{v}) \\ \forall \vec{x} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u\left(\vec{x}+\lambda\vec{y}\right) = u(\vec{x}) + \lambda u(\vec{v}).$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

- Si u est bijective, on parle d'**isomorphisme** (d'espaces vectoriels).
- Si $E = F$, on parle d'**endomorphisme** et on note $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,F)$.
- Si $E = F$ et u est bijective, on parle d'**automorphisme**.
- Si $u \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$, on dit que f est une **forme linéaire**.
- On note $\mathscr{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$ appelé **dual** de E l'ensemble des formes linéaires sur E.

Remarque

R 21 – Ne pas confondre E^* et $E \setminus \{0_E\}$.

R 22 – Une application linéaire est en particulier un morphisme de groupe de $(E,+)$ sur $(F,+)$.

Exemple

E 9 – Dérivation, intégration.

E 10 – Homothéties vectorielles

E 11 – Morphisme d'évaluation de E^D dans E.

E 12 – Morphisme des fonctions polynomiales associées aux polynômes.

E 13 – La trace sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

E 14 – La transposition sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vers $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

b Propriétés

Propriété 21

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

(i) $u\left(\vec{0}_E\right) = \vec{0}_F$

(ii) $\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in E, \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},$

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{x}_i).$$

(iii) Si A est une partie de E, $u(\operatorname{Vect} A) = \operatorname{Vect}(u(A))$.

(iv) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, $u_{|E'} \in \mathscr{L}(E',F)$ (u induit une application linéaire sur E').*

(v) *Si u est bijective (isomorphisme) alors $u^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.*

(vi) *$(\mathscr{L}(E,F),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

(vii) *Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.*

(viii) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E et F' est un sous-espace vectoriel de F, $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration

(i) $2u\left(\vec{0}_E\right) = u\left(\vec{0}_E + \vec{0}_E\right) = u\left(\vec{0}_E\right)$. (Propriété de morphisme de groupes)

(ii) Récurrence.

(iii) Si $\vec{x} \in \operatorname{Vect} A$, on a $n \in \mathbb{N}$, $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n \in A$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i$ et donc $u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u\left(\vec{x}_i\right) \in \operatorname{Vect}(u(A))$.

Si $\vec{y} \in \operatorname{Vect}(u(A))$, on a $n \in \mathbb{N}$, $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n \in A$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u\left(\vec{x}_i\right)$ et donc $\vec{y} = u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i\right) \in u(\operatorname{Vect} A)$.

(iv) Immédiat.

(v) Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ bijective, $\vec{y}_1,\vec{y}_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a $\vec{x}_1,\vec{x}_2 \in E$ tels que $\vec{y}_1 = u(\vec{x}_1)$ et $\vec{y}_2 = u(\vec{x}_2)$.
Alors $u^{-1}\left(\vec{y}_1 + \lambda\vec{y}_2\right) = u^{-1}\left(u(\vec{x}_1) + \lambda u(\vec{x}_2)\right) = u^{-1} \circ u(\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2) = \vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2 = u^{-1}\left(\vec{y}_1\right) + \lambda u^{-1}\left(\vec{y}_2\right)$ en utilisant la linéarité de u.

(vi) Sous-espace vectoriel de F^E sans difficulté.

(vii) Si $\vec{x}_1,\vec{x}_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \circ u(\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2) = v\left(u(\vec{x}_1) + \lambda u(\vec{x}_2)\right) = v \circ u(\vec{x}_1) + \lambda v \circ u(\vec{x}_2)$ par linéarité de u puis de v.

(viii) $(v_1 + \lambda v_2) \circ u = v_1 \circ u + \lambda v_2 \circ u$ est toujours vrai, $v \circ (u_1 + \lambda u_2) = v \circ u_1 + \lambda v \circ u_2$ provient de la linéarité de v.

(ix)
- $u(E') \subset F$, $u(E') \neq \varnothing$ car $\vec{0}_F = u(\underbrace{\vec{0}_E}_{\in E'}) \in u(E')$ et si $\vec{x}_1,\vec{x}_2 \in E'$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
$$u(\vec{x}_1) + \lambda u(\vec{x}_2) = u(\underbrace{\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2}_{\in E'}) \in u(E').$$
- $u^{-1}(F') \subset E$, $u^{-1}(F') \neq \varnothing$ car $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \in F'$ donc $0_E \in u^{-1}(F')$, et si $\vec{x}_1,\vec{x}_2 \in u^{-1}(F')$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $u(\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2) = \underbrace{u(\vec{x}_1)}_{\in F'} + \lambda \underbrace{u(\vec{x}_2)}_{\in F'} \in F'$ donc $\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2 \in u^{-1}(F')$. ■

C Noyau et image

Définition 15 : Noyau et image

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- Le **noyau** de u est
$$\operatorname{Ker} u = u^{-1}\left(\left\{\vec{0}_F\right\}\right) = \left\{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_F\right\} \in \mathscr{P}(E).$$
- L'**image** de u est
$$\operatorname{Im} u = u(E) = \left\{u(\vec{x})\ ;\ \vec{x} \in E\right\} \in \mathscr{P}(F).$$

Remarque

R 23 – L'image de u est en fait l'image de u vu comme simple fonction et le noyau de u est le noyau de u vu comme un morphisme de groupes additifs.

Propriété 22

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

(i) $\operatorname{Im} u$ *et* $\operatorname{Ker} u$ *sont des sous-espaces vectoriels de* F *et* E *respectivement.*

(ii) u *est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$.

(iii) u *est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} u = F$.

(iv) *Si* E' *est un sous-espace vectoriel de* E*, alors* $\operatorname{Ker}\left(u_{|E'}\right) = E' \cap \operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im}\left(u_{|E'}\right) = u(E')$.

Démonstration

(i) Image directe et réciproque des sous-groupes E et $\{\vec{0}_F\}$.

(ii) Déjà vu pour les morphismes de groupes : on a toujours $\vec{0}_E \in \operatorname{Ker} u$ et

- si u est injective,
$$\vec{x} \in \operatorname{Ker} u \Rightarrow u(\vec{x}) = \vec{0}_F = u\left(\vec{0}_E\right) \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}_E.$$
- si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ alors
$$u(\vec{x}) = u\left(\vec{x}'\right) \Rightarrow u\left(x - x'\right) = \vec{0}_F \Rightarrow x - x' \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow x = x'$$
par linéarité de u, donc u est injective.

(iii) Toujours vrai : u est surjective si et seulement si $\forall\, \vec{y} \in F,\ \ \exists\, \vec{x} \in E,\ \ u(\vec{x}) = \vec{y}$ si et seulement si $\forall\, \vec{y} \in F,\ \ \vec{y} \in u(E)$ si et seulement si $F \subset u(E)$; et $u(E) \subset F$ est toujours vrai.

(iv) $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u_{|E'} \Longleftrightarrow \vec{x} \in E'$ et $u(\vec{x}) = \vec{0}_F$ et $\vec{y} \in \operatorname{Im} u_{|E'} \Longleftrightarrow \exists\, \vec{x} \in E',\ \ u(\vec{x}) = \vec{y} \Longleftrightarrow \vec{y} \in u(E')$. ■

d Rang

Propriété 23

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ *avec* E *ou* F *de dimension finie.*
Alors $\operatorname{Im} u$ *est de dimension finie au plus* $\min(\dim E, \dim F)$.

Démonstration

Si $E = \operatorname{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$, alors $\operatorname{Im} u = u(E) = \operatorname{Vect}(u(\vec{e}_1), \ldots, u(\vec{e}_p))$ de dimension finie $\leqslant p$ et $\operatorname{Im} u$ sous-espace vectoriel de F. ■

Définition 16 : Rang

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, E ou F de dimension finie.
On appelle **rang** de u l'entier $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.
Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}\left(u(\mathscr{B})\right)$.

Remarque

R 24 – On a toujours $\operatorname{rg} u \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

Propriété 24

On ne change pas le rang en composant à gauche ou à droite par un isomorphisme.

Démonstration

- Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ bijective. On veut montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.
  Si $\mathscr{B}$ est une base de $\operatorname{Im} u$, $v(\mathscr{B})$ est libre par injectivité de v et engendre $v(\operatorname{Im} u) = v \circ u(E) = \operatorname{Im}(v \circ u)$. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(v \circ u)$ et
  $$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{taille}(v(\mathscr{B})) = \operatorname{taille}(\mathscr{B}) = \operatorname{rg} u.$$
- Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(G,E)$ bijective. On veut montrer que $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} u$.
  Or $\operatorname{Im} u = u(E) = u(v(G)) = \operatorname{Im}(u \circ v)$ donc $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u \circ v)$.

2 Endomorphismes

a Structure d'algèbre

Propriété 25

$(\mathscr{L}(E),+,\circ,\cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative et non intègre si $\dim E \geqslant 2$.

Notation 1

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$, on note $uv = u \circ v$, $u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u^0 = \operatorname{id}_E$.

Définition 17 : Polynôme en un endomorphisme

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on peut définir $P(u) = a_0 \operatorname{id}_E + a_1 u + \cdots + a_n u^n$.
Lorsque $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de u.

Propriété 26

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, l'application $\left|\begin{array}{ccc} (\mathbb{K}[X],+,\times,\cdot) & \longrightarrow & (\mathscr{L}(E),+,\circ,\cdot) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}\right.$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

⚠ *En particulier, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.*

Démonstration

La linéarité ne pose pas de problème, on a bien $1_{K[X]}(u) = \operatorname{id}_E$.

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(P \times Q)(u) = \sum_{k,\ell} a_k b_\ell u^{k+\ell} = \sum_k a_k u^k \left(\sum_\ell b_\ell u^\ell\right) = P(u) \circ Q(u)$ par linéarité de u. ∎

Remarque

R 25 – Deux polynômes en u commutent.

Propriété 27 : Binôme

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$$

b Groupe linéaire

Définition 18 : Groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$ appelé **groupe linéaire de** E.

Propriété 28

$(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

Démonstration

C'est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ ou c'est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(E), \circ)$. ■

Méthode 7 : Montrer l'inversibilité et trouver l'inverse avec un polynôme annulateur

C Projecteurs

Définition 19 : Projection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.
Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.
On appelle **projection** (ou **projecteur**) **sur** F **parallèlement à** G l'application

$$p : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F \end{array}\right.$$

On définit de même la projection q sur G parallèlement à F.
On dit que les projections p et q sont **associées.**

Propriété 29

Avec les notations ci-dessus :

- $p, q \in \mathcal{L}(E)$
- $p + q = \mathrm{id}_E$
- $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Démonstration

■

Propriété 30 : Caractérisation

p est une projection (vectorielle) sur E si et seulement si $p \in (E)$ et $p^2 = p \circ p = p$.
Dans ce cas,

(i) $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$

(ii) *p est la projection sur*

$$F = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Inv}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$$

parallèlement à $G = \mathrm{Ker}\, p$

Démonstration

■

Remarque

R 26 – A savoir retrouver sur un dessin.

R 27 – On retiendra que

$$\vec{x} \in F = \operatorname{Im} p \Longleftrightarrow \vec{x} \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \Longleftrightarrow p(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Exemple

E 15 – Projection sur $\mathscr{P}$ (fonctions paires) parallèlement à $\mathscr{I}$ (fonctions impaires) ?

Méthode 8 : Étude d'une projection

Reconnaître et étudier une projection, c'est

1. vérifier que $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$ pour un endomorphisme, ou $P^2 = P$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker} p$.

d Symétries

Définition 20 : Symétrie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.
Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **symétrie sur F parallèlement à G** l'application $s : \begin{vmatrix} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F - \vec{x}_G \end{vmatrix}$ ie $s = p - q$ avec les notations précédentes.

Propriété 31

(i) $s \in \mathscr{L}(E)$

(ii) *Si p projection sur F parallèlement à G, $s = 2p - \mathrm{id}_E$.*

Démonstration

■

Propriété 32 : Caractérisation

s est une symétrie (vectorielle) sur E si et seulement si $s \in (E)$ et $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}_E$.
Dans ce cas,

(i) $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = E$

(ii) *s est la projection sur $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$*

Démonstration

■

Remarque

R 28 – Si $F = \{\vec{0}_E\}$, alors $G = E$ et $s = -\mathrm{id}_E$: symétrie centrale.

Méthode 9 : Étude d'une symétrie

Reconnaître et étudier une symétrie, c'est

1. vérifier que $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{id}_E$ pour un endomorphisme, ou $S^2 = I_n$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(p + \mathrm{id}_E)$.

3 Détermination d'une application linéaire

a Image d'une base

Propriété 33 : Linéarité des formes i^e coordonnée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de E. Pour $\vec{x} \in E$, on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.

Alors pour tout $i \in I$, l'application $\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$ est une forme linéaire (i^e coordonnée).

Propriété 34 : Caractérisation par l'image d'une base

Soient E, F deux espaces vectoriels, $\mathscr{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de E et $\mathscr{F} = \left(\vec{f}_i\right)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall\, i \in I,\ \ u(\vec{e}_i) = f_i$.

Démonstration

Par analyse synthèse. ■

Corollaire 6

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $u = v$ si et seulement si $u(\mathscr{B}) = v(\mathscr{B})$.

Propriété 35

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

- *u est injective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est libre.*
- *u est surjective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ engendre F.*
- *u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est une base de F.*

Remarque

R 29 – $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

Démonstration

■

b Applications linéaires et dimensions

Propriété 36

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\dim E = \dim F \iff E$ et F sont isomorphes.

Démonstration

■

Remarque

R 30 – L'étude de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^p$ se reporte sur tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p.

Propriété 37

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors u est injective $\iff u$ est surjective $\iff u$ est bijective.

Remarque

R 31 – C'est en particulier le cas pour tout endomorphisme en dimension finie.

Démonstration

Image d'une base. ■

Exemple

E 16 – $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$ où $x_0, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts est facilement injectif (noyau réduit à $0_{\mathbb{K}[X]}$) et $\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1}$ donc c'est un isomorphisme, ce qui redonne le résultat de l'interpolation de Lagrange.

Propriété 38

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F = n$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalents :

(i) u isomorphisme

(ii) u est inversible à gauche

(iii) u est inversible à droite

(iv) $\operatorname{rg} u = n$

Démonstration

■

c Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$

Propriété 39

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Démonstration

Isomorphisme $u \mapsto u(\mathscr{B})$. ■

Remarque

R 32 – ⚠ $\mathscr{L}(E)$ est de dimension $(\dim E)^2$.

d Décomposition d'applications linéaires (MPI)

Théorème 4

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et pour tout i, $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout i, $u_{|E_i} = u_i$.

Démonstration

Analyse-synthèse. ■

4 Théorème du rang

Théorème 5 : et formule du rang

$u \in \mathscr{L}(E,F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire H de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$.
Si, de plus, E est de dimension finie, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$.

Remarque

R 33 – ⚠ En général, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas supplémentaires.

Exemple

E 17 – $u : (x,y) \mapsto (y,0)$

Corollaire 7

Si E est de dimension finie, u est injective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim E$.
Si F est de dimension finie, u est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim F$.

Démonstration : Nouvelle preuve de la formule de Grassmann

Théorème du rang appliqué à u : $\left|\begin{array}{ccc} F\times G & \longrightarrow & F+G \\ (\vec{x},\vec{y}) & \longmapsto & \vec{x}+\vec{y}\end{array}\right.$ ■

Démonstration : Nouvelle preuve de v injective $\Longrightarrow \mathrm{rg}(v\circ u)=\mathrm{rg}\, u$

On a $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}(v\circ u)$ par injectivité de v, et le théorème du rang donne le résultat. ■

5 Formes linéaires et hyperplans

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 21 : Formes linéaires

On rappelle que les **formes linéaires** sont les $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et que (HP) $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est appelé **espace dual** de E.

Remarque

R 34 – En dimension finie, $\dim E^* = \dim E$.

Définition 22 : Hyperplan

On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace de E égal au noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

Théorème 6 : Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *H est un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle : $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\},\quad H = \mathrm{Ker}\,\varphi$.)*

(ii) *H est un supplémentaire de toute droite $D \not\subset H$.*

(iii) *H est un supplémentaire d'une droite $D \not\subset H$.*

Démonstration

■

Corollaire 8

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

$$\mathrm{Ker}\,\varphi_1 = \mathrm{Ker}\,\varphi_2 \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\quad \varphi_1 = \lambda\varphi_2.$$

Démonstration

Si $\vec{x}_0 \notin H$, $\mathbb{K}\vec{x}_0$ est un supplémentaire de H et $\varphi_1 = \dfrac{\varphi_1(\vec{x}_0)}{\varphi_2(\vec{x}_0)}\varphi_2$. ■

Propriété 40 : Cas de la dimension finie

En dimension finie, les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.

Remarque : Équation d'un hyperplan

R 35 – Si $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E et $H = \operatorname{Ker}\varphi$ un hyperplan.
Pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ donc

$$\varphi(\vec{x}) = x_1\varphi(\vec{e}_1) + \cdots + x_n\varphi(\vec{e}_n).$$

Si on note $a_i = \varphi(\vec{e}_i)$, on obtient

$$\vec{x} \in H \iff a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Réciproquement, toute équation de H donne une telle forme linéaire φ.
La propriété précédente nous dit que toutes les équations de H sont colinéaires.

Démonstration

Par récurrence sur m avec la formule de Grassmann. ■

Propriété 41 : Système d'équations d'un sous-espace

Si F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$ tels que $p < n$, alors F est l'intersection de $n - p$ hyperplans distincts.

Démonstration

On complète une base de F en une base de E et on s'intéresse à la base duale. ■

Remarque

R 36 – Cela traduit le fait que le sous-espace puisse être décrit par un système de $n - p$ équations indépendantes.

IV Solutions des problèmes linéaires (MP2I)

Définition 23 : Problème linéaire

Un **problème linéaire** est un problème conduisant à une équation du type $u(x) = b$ où $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $b \in F$ un vecteur fixé, l'inconnue x étant un vecteur de E.

Propriété 42

L'ensemble des solution de cette équation est

- *soit vide (si $b \notin \operatorname{Im} u$)*
- *soit un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} u$, donc de la forme*

$$x_0 + \operatorname{Ker} u$$

où x_0 est une solution particulière et $\operatorname{Ker} u$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $u(x) = 0_F$.

Démonstration

S'il y a une solution x_0, alors

$$u(x) = b = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0_F \iff x - x_0 \in \operatorname{Ker} u \iff x \in x_0 + \operatorname{Ker} u.$$

■

Exemple

E 18 – Équations différentielles linéaires

E 19 – Suites arithmético-géométriques.

E 20 – Systèmes linéaires.

E 21 – Interpolation de Lagrange

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$$

Connaissant une solution P_0, l'ensemble des solutions est $P_0 + \operatorname{Ker} u$.