

Structures algébriques

1 GROUPES ET SOUS-GROUPES

1 Structure de groupe (MP2I)

Définition 1 : Groupe

On appelle **groupe** tout couple (G, \star) où G est un ensemble tel que

- (i) \star est une loi de composition interne sur G
- (ii) \star est associative
- (iii) G admet un élément neutre pour \star
- (iv) Tout élément de G admet un symétrique dans G pour \star .

Si, de plus, \star est commutative, on dit que (G, \star) est un **groupe commutatif** ou **groupe abélien**.

2 Puissances ou itérées d'un élément (MP2I)

Définition 2 : Itérées d'un élément

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne \star (notée multiplicativement) **associative** et possédant un élément neutre e .

Pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit récursivement

$$x^n = \begin{cases} e & \text{si } n = 0 \\ x^{n-1} \star x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Propriété 1 : des exposants

Soient $x, y \in E$ et $n, m \in \mathbb{N}$.

- (i) $x^{n+m} = x^n \star x^m = x^m \star x^n$.
- (ii) $(x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n$.
- (iii) Si $x \star y = y \star x$,
 $(x \star y)^n = x^n \star y^n$.
- (iv) Si x est inversible, x^n est inversible et $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$.

Notation 1 : Exposant négatif

Si $x \in E$ inversible et $n \in \mathbb{N}$, on note x^{-n} l'élément $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$.

3 Régularité

Soit ¹ E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative \star et possédant un élément neutre e .

Définition 3 : Régularité

Soit $x \in E$. On dit que x est **régulier** (ou **simplifiable**)

- **à gauche** lorsque

$$\forall a, b \in E, \quad x \star a = x \star b \implies a = b$$

- **à droite** lorsque

$$\forall a, b \in E, \quad a \star x = b \star x \implies a = b$$

On dit que x est **régulier** lorsqu'il l'est à gauche et à droite.

Propriété 2 : Régularité d'un inversible

Tout élément inversible de (E, \star) est régulier.

Corollaire 1 : Régularité dans un groupe

Si (G, \star) est un groupe, alors tout élément de G est régulier.

Corollaire 2 : Bijectivité des translations

Si (G, \star) est une groupe et $a \in G$ fixé.

Les applications $\varphi_a : \begin{cases} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto a \star x \end{cases}$ et $\psi_a : \begin{cases} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto x \star a \end{cases}$ (appelées translations à gauche et à droite) sont bijectives.

Corollaire 3

Si (G, \star) est une groupe et $a \in G$ fixé.

$$G = \{a \star x, x \in G\} = \{x \star a, x \in G\}.$$

1. On dit que (E, \star) est un **monoïde**.



4 Groupe produit (MP2I)

Propriété 3 : Groupe produit

Soit (G, \star) et (H, Δ) des groupes.
Pour tout (g, h) et (g', h') dans $G \times H$, on pose

$$(g, h) \top (g', h') = (g \star g', h \Delta h').$$

Alors $(G \times H, \top)$ a une structure de groupe.
Si, de plus, les lois \star et Δ sont commutatives, alors \top l'est.

5 Sous-groupes

a Définition et caractérisation (MP2I)

Définition 4 : Sous-groupe

Soit (G, \star) groupe. On note $\star|_{H^2}$ la restriction à H^2 de la loi \star .
On dit que H est un **sous-groupe** de (G, \star) si $H \subset G$ et $(H, \star|_{H^2})$ est un groupe.

Propriété 4 : Sous-groupes triviaux

Soit (G, \star) groupe. G et $\{e_G\}$ sont des sous-groupes de (G, \star) appelés **sous-groupes triviaux**.

Propriété 5

- Soit H un sous-groupe de (G, \star) .
- (i) (H, \star) possède le même élément neutre que (G, \star) .
 - (ii) Si $x \in H$, alors x a même inverse dans (H, \star) et dans (G, \star) .

Propriété 6 : caractérisation des sous-groupes

Soit (G, \star) un groupe (multiplicatif). Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) H est un sous-groupe de (G, \star)
- (ii)
$$\left\{ \begin{array}{l} H \subset G \\ H \neq \emptyset \quad (e_G \in H) \\ H \text{ est stable par } \star : \forall x, y \in H, \quad x \star y \in H \\ H \text{ est stable par inverse} : \forall x \in H, \quad x^{-1} \in H \end{array} \right.$$

$$(iii) \left\{ \begin{array}{l} H \subset G \\ H \neq \emptyset \quad (e_G \in H) \\ \forall x, y \in H, \quad x \star y^{-1} \in H \end{array} \right.$$

b Intersection et réunion (MPI)

Propriété 7 : Intersection de sous-groupes

Soit (G, \star) un groupe et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de (G, \star) . Alors $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de (G, \star) .

c Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ (MPI)

Notation 2

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ak, k \in \mathbb{Z}\}$.

Propriété 8 : Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Les sous-groupes G de $(\mathbb{Z}, +)$ sont exactement les $a\mathbb{Z}$ pour $a \in \mathbb{N}$.
De plus, si $G \neq \{0\}$, $a = \min(G \cap \mathbb{N}^*)$.

6 Morphismes (MP2I)

a Définition

Définition 5 : Morphisme de groupe

Soient (G, \star) et (G', \bullet) deux groupes.
 $f : (G, \star) \rightarrow (G', \bullet)$ est un **morphisme de groupes** si et seulement si

$$\forall (x, y) \in G^2, \quad f(x \star y) = f(x) \bullet f(y)$$

Lorsque $(G, \star) = (G', \bullet)$, on parle d'**endomorphisme** de groupes.
Lorsque f est bijective, on parle d'**isomorphisme**.

Lorsqu'il existe un isomorphisme entre G et G' , on dit que G et G' sont **isomorphes**.

Lorsque f est bijective et $G = G'$, on parle d'**automorphisme**.

Propriété 9 : Image du neutre et du symétrique par un morphisme de groupes

Si $f : (G, \star) \rightarrow (G', \bullet)$ est un morphisme de groupes, alors $f(e_G) = e_{G'}$ et pour tout $x \in G$, $f(\text{sym}(x)) = \text{sym}(f(x))$.

Propriété 10 : Image d'une itérée

En notation multiplicative, si $f : (G, \star) \rightarrow (G', \bullet)$ est un morphisme de groupes, pour tout $x \in G$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(x^k) = f(x)^k$.

Propriété 11 : Composée de morphismes

Si $f : (G, \star) \rightarrow (G', \bullet)$ et $g : (G', \bullet) \rightarrow (G'', \Delta)$ sont des morphismes de groupes, alors $g \circ f$ en est encore un.

b Noyau et image

Définition 6 : Image et noyau d'un morphisme

Soit $f : (G, \star) \rightarrow (G', \bullet)$ un morphisme de groupes.

- On appelle **noyau** de f l'ensemble

$$\text{Ker } f = f^{-1}(\{e_{G'}\}) = \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\} \subset G.$$

Ainsi, $x \in \text{Ker } f \iff f(x) = e_{G'}$.

- On appelle **image** de f l'ensemble

$$\text{Im } f = f(G) = \{f(x), x \in G\} \subset G'.$$

Ainsi, $y \in \text{Im } f \iff \exists x \in G, y = f(x)$.

Propriété 12 : Caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité

Soit $f : (G, \star) \rightarrow (G', \bullet)$ un morphisme de groupe.

- f est injectif si et seulement si $\text{Ker } f = \{e_G\}$.
- f est surjectif si et seulement si $\text{Im } f = G'$.

Propriété 13 : Images directe et réciproque d'un sous-groupe

Soit $f : (G, \star) \rightarrow (G', \bullet)$ un morphisme de groupes.

- (i) Si H est un sous-groupe de (G, \star) , alors $f(H)$ est un sous-groupe de (G', \bullet)
- (ii) Si H' est un sous-groupe de (G', \bullet) , $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de (G, \star) .

Corollaire 4 : Cas particulier du noyau et de l'image

Soit $f : (G, \star) \rightarrow (G', \bullet)$ un morphisme de groupes.

Alors $\text{Ker } f$ est un sous-groupe de (G, \star) et $\text{Im } f$ est un sous-groupe de (G', \bullet) .

c Isomorphismes

Propriété 14 : Réciproque d'un isomorphisme

Soit $f : (G, \star) \rightarrow (G', \bullet)$ un isomorphisme de groupes.

Alors f^{-1} est un isomorphisme du groupe (G', \bullet) sur le groupe (G, \star) .

II ANNEAUX ET CORPS

1 Anneaux (MP2I)

Définition 7 : Distributivité

Soit E un ensemble et \star et \top deux lois de composition interne sur E , on dit que \star est **distributive** sur \top lorsque $\forall (x, y, z) \in E^3$,

$$x \star (y \top z) = (x \star y) \top (x \star z),$$

$$(y \top z) \star x = (y \star x) \top (z \star x).$$

Définition 8 : Anneau

On dit que $(A, +, \times)$ est un **anneau** lorsque

- (i) $(A, +)$ est un groupe abélien. L'élément neutre est noté 0_A .
- (ii) \times est une loi de composition interne associative admettant un élément neutre appelé unité de A , noté 1_A .
- (iii) \times est distributive sur $+$.

Lorsque, de plus, \times est commutative, on dit que $(A, +, \times)$ est un **anneau commutatif**.

2 Groupe des inversibles (MP2I)

Définition 9 : Inversibles d'un anneau

Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

$a \in A$ est dit **inversible** si et seulement s'il est symétrisable pour \times .

Son symétrique est appelé **inverse** de a , noté a^{-1} .

On note U_A ou $U(A)$ ou A^\times l'ensemble des inversibles de A .

Propriété 15 : Groupe des inversibles

Si $(A, +, \times)$ anneau, alors (U_A, \times) est un groupe appelé **groupe des inversibles** de A .



3 Calculs dans un anneau (MP2I)

Propriété 16 : Calculs dans un anneau

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Soient $a, b \in A$ et $n \in \mathbb{N}$.

- Si $a \times b = b \times a$,

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

- **Formule du binôme de Newton** : Si $a \times b = b \times a$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

- **Factorisation^a de $a^n - b^n$** : Si $a \times b = b \times a$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

- **Somme géométrique** : En particulier, pour tout $x \in A$;

$$1_A - x^n = (1_A - x) \times \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

a. parfois appelée formule de Bernoulli

4 Corps (MP2I)

Définition 10 : Corps

Soit \mathbb{K} un ensemble, $+, \times$ deux lois de composition internes sur \mathbb{K} . On dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un **corps** lorsque

- $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau commutatif.
- $\mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ est non vide et tous ses éléments sont inversibles (c'est-à-dire $\mathbb{K} \neq \{0_{\mathbb{K}}\}$ et $U_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$.)

ou, de manière équivalente,

- $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe abélien,
- $(\mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, \times)$ est un groupe,
- \times est commutative et distributive sur $+$.

5 Intégrité (MP2I)

Définition 11 : Anneau intègre

Un anneau $(A, +, \times)$ est dit **intègre** si

- A est commutatif,
- $A \neq \{0_A\}$ c'est-à-dire $1_A \neq 0_A$,
- A n'admet aucun diviseur de zéro, c'est-à-dire

$$\forall a, b \in A, a \times b = 0_A \implies a = 0_A \text{ ou } b = 0_A.$$

Propriété 17 : Généralisation

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$.

Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k \neq 0_A$, alors $a_1 \times \dots \times a_n \neq 0_A$.

Propriété 18 : Régularité dans un anneau intègre

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre.

Tout élément non nul de A est régulier (ie simplifiable) pour \times

Propriété 19 : Intégrité d'un corps

Tout corps est un anneau commutatif intègre. La réciproque est fautive.

6 Anneau produit (MPI)

Propriété 20 : Anneau produit

Soit $(A, +, \times)$ et (B, \oplus, \otimes) des anneaux.

Pour tout (a, b) et (a', b') dans $A \times B$, on pose

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b \oplus b')$$

$$(a, b) \times (a', b') = (a \times a', b \otimes b')$$

Alors $(A \times B, +, \times)$ a une structure d'anneau.

Si, de plus, les lois \times et \otimes sont commutatives, alors \times l'est.

Propriété 21 : Inversion dans un anneau produit

Si $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ sont deux anneaux, alors

$$U_{A \times B} = U_A \times U_B.$$

De plus, si $(a, b) \in U_{A \times B}$, alors

$$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1}).$$

7 Sous-anneau et sous-corps (MP2I)

Définition 12 : Sous-anneau

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit que B est un **sous-anneau** de $(A, +, \times)$ lorsque

- $B \subset A$
- **Important** : $1_A \in B$
- $(B, +|_{B^2}, \times|_{B^2})$ est un anneau.

Propriété 22 : Caractérisation des sous-anneaux

B est un sous-anneau de $(A, +, \times)$ si et seulement si

- $$\left\{ \begin{array}{l} B \subset A \\ (B, +) \text{ est un sous-groupe de } (A, +) \\ B \text{ est stable par } \times : \forall x, y \in B, x \times y \in B \\ 1_A \in B \end{array} \right.$$

ou, de manière équivalente,

- $$\left\{ \begin{array}{l} B \subset A \\ 1_A \in B \\ \forall x, y \in B, x + y \in B, -x \in B \text{ et } x \times y \in B \end{array} \right.$$

ou encore

- $$\left\{ \begin{array}{l} B \subset A \\ 1_A \in B \\ \forall x, y \in B, x - y \in B \text{ et } x \times y \in B \end{array} \right.$$

Définition 13 : Sous-corps

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps. On dit que $(\mathbb{L}, +, \times)$ est un **sous-corps** de $(\mathbb{K}, +, \times)$ lorsque $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ et $(\mathbb{L}, +|_{\mathbb{L}^2}, \times|_{\mathbb{L}^2})$ est un corps.

Propriété 23 : Caractérisation des sous-corps

$(\mathbb{L}, +, \times)$ est un sous-corps de $(\mathbb{K}, +, \times)$ si et seulement si

- $$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L} \subset \mathbb{K} \\ (\mathbb{L}, +) \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{K}, +) \\ (\mathbb{L} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, \times) \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, \times) \end{array} \right.$$

ou, de manière équivalente,

- $$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{L} \subset \mathbb{K} \\ \mathbb{L} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\} \neq \emptyset \quad (1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{L}) \\ \forall x, y \in \mathbb{L}, x - y \in \mathbb{L} \\ \forall x, y \in \mathbb{L} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, xy^{-1} \in \mathbb{L} \end{array} \right.$$

8 Morphismes d'anneaux (MP2I)

Définition 14 : Morphisme d'anneaux

Soient $(A, +, \times)$ et (A', \oplus, \otimes) deux anneaux. $f : (A, +, \times) \rightarrow (A', \oplus, \otimes)$ est un **morphisme d'anneaux** si et seulement si

- (i) $\forall (a, b) \in A^2, f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$
(ie $f : (A, +) \rightarrow (A', \oplus)$ morphisme de groupes)
- (ii) $\forall (a, b) \in A^2, f(a \times b) = f(a) \otimes f(b)$
- (iii) $f(1_A) = 1_{A'}$

On parle aussi, d'**endomorphisme**, d'**isomorphisme** et d'**automorphisme** d'anneaux.

$\text{Ker } f = f^{-1}(\{0_{A'}\}) = \{a \in A \mid f(a) = 0_{A'}\}$ est le **noyau** de f .

$\text{Im } f = f(A) = \{f(x), x \in A\}$ est l'**image** de f .

Propriété 24 : des morphismes d'anneaux

Soit $f : (A, +, \times) \rightarrow (B, \oplus, \otimes)$ est un morphisme d'anneaux.

- (i) Si a est inversible dans A , alors $f(a)$ l'est dans B et $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.
- (ii) Si f est un isomorphisme alors $f^{-1} : (B, \oplus, \otimes) \rightarrow (A, +, \times)$ est aussi un isomorphisme d'anneau.
- (iii) Si $g : (B, \oplus, \otimes) \rightarrow (C, \dot{+}, \dot{\times})$ est aussi un morphisme d'anneau, alors $g \circ f : (A, +, \times) \rightarrow (C, \dot{+}, \dot{\times})$ l'est encore.

Définition 15 : Morphisme de corps

Soient $(\mathbb{K}, +, \times)$ et $(\mathbb{K}', \oplus, \otimes)$ deux corps. $f : (\mathbb{K}, +, \times) \rightarrow (\mathbb{K}', \oplus, \otimes)$ est un **morphisme de corps** si et seulement s'il s'agit d'un morphisme d'anneaux.



III IDÉAL D'UN ANNEAU COMMUTATIF (MPI)

1 Généralités

Définition 16 : Idéal

Soit $(A, +, \times)$ un anneau **commutatif** et $I \subset A$. On dit que I est un **idéal** de $(A, +, \times)$ lorsque

- (i) I est un sous-groupe de $(A, +)$
- (ii) $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$.

Propriété 25 : Idéaux triviaux

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. $\{0_A\}$ et A sont des idéaux (triviaux) de $(A, +, \times)$.

Ce sont les seuls idéaux si de plus $(A, +, \times)$ est un corps.

Propriété 26 : Noyau d'un morphisme d'anneaux

Soit $f : (A, +, \times) \rightarrow (A', \oplus, \otimes)$ un morphisme d'anneaux. Alors $\text{Ker } f$ est un idéal de $(A, +, \times)$.

2 Somme et intersection d'idéaux

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

Propriété 27 : Somme et intersection d'idéaux

Soient I, J des idéaux de A . On note

$$I + J = \{x + y, x \in I, y \in J\}$$

- (i) $I + J$ est un idéal.
Il s'agit du plus petit idéal de A (au sens de l'inclusion) contenant les idéaux I et J .
- (ii) $I \cap J$ est un idéal.
Il s'agit du plus grand idéal de A (au sens de l'inclusion) contenu dans les idéaux I et J .

3 Idéal principal

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

Propriété 28 : Idéal engendré par un élément

Soit $x \in A$. On note

$$(x) = xA = \{xa, a \in A\}.$$

C'est un idéal de A , appelé **idéal engendré** par x .

Définition 17 : Idéal et anneau principal

- Tout idéal de la forme (x) (donc engendré par un seul élément) est dit **principal**.
- Un anneau commutatif est dit **principal** lorsque
 - (i) C'est un anneau intègre.
 - (ii) Tous ses idéaux sont principaux.

Théorème 1 : Principauté de \mathbb{Z}

L'anneau \mathbb{Z} est principal.

4 Divisibilité dans un anneau intègre

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif **intègre**.

Définition 18 : Divisibilité

Soient $a, b \in A$.

On dit que b **divise** a ou que a est multiple de b lorsqu'il existe $q \in A$ tel que $a = bq$. On note $b|a$.
 a et b sont dit associés lorsque $a|b$ et $b|a$.

Propriété 29 : Caractérisation avec les idéaux

Soient $a, b \in A$.

b divise a si et seulement si $a \in bA$ si et seulement si $aA \subset bA$.

Propriété 30

Soient $a, b \in A$.

a et b sont associés si et seulement si $aA = bA$ si et seulement si il existe $q \in U_A$ tel que $b = qa$.

IV STRUCTURE D'ALGÈBRE (MPI)

1 Algèbre et sous-algèbre

Définition 19 : Structure d'algèbre

On dit que $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre lorsque

- $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel,
- $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau,
- Pseudo-associativité : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathcal{A},$

$$\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y).$$

On a aussi une notion de sous-algèbre : c'est simultanément un sous-espace vectoriel et un sous-anneau, donc stable par combinaisons linéaires et par produit et contenant l'unité.

Propriété 31 : Caractérisation des sous-algèbres

Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre. \mathcal{B} est une sous-algèbre de $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ lorsque

- (i) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$
- (ii) $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{B}$
- (iii) $\forall x, y \in \mathcal{B}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + \lambda y \in \mathcal{B}$
- (iv) $\forall x, y \in \mathcal{B}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \times y \in \mathcal{B}$

L'intérêt principal des algèbres est de pouvoir évaluer un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} en un élément d'une \mathbb{K} -algèbre :

Définition 20 : Polynôme en un élément d'une algèbre

Si $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $x \in \mathcal{A}$, on pose

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 1_{\mathcal{A}} + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

Attention à ne pas oublier l'unité de \mathcal{A} !

2 Morphismes d'algèbres

Définition 21 : Morphisme d'algèbre

Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot), (\mathcal{B}, +, \times, \cdot)$ et $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. On dit que f est un **morphisme d'algèbres** lorsque

- (i) f est linéaire ie

$$\forall x, y \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

- (ii) $\forall x, y \in \mathcal{A}, f(x \times y) = f(x) \times f(y)$

- (iii) $f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$.

Propriété 32

Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une \mathbb{K} -algèbre et $x \in \mathcal{A}$.

Alors l'application $f : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathcal{A} \\ P & \mapsto P(x) \end{cases}$ est un morphisme de \mathbb{K} -algèbres.

V COMPLÉMENT :

SOUS-GROUPES DE $(\mathbb{R}, +)$

Théorème 2 : Hors-Programme

Soit G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Alors G est soit dense dans \mathbb{R} , soit discret (de la forme $\alpha\mathbb{Z}$).