5 Théorème de Césaro - lemme de l'escalier

1. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(n \geqslant N_1 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_1 + 1$. On a

$$|v_n - \ell| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k - \ell|$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}|u_k - \ell|.$$

D'autre part, comme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k - \ell| \xrightarrow[n\infty]{} 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(n \geqslant N_2 \Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

En notant $N = \mathrm{Max}(N_1, N_2)$, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(n \geqslant N \Longrightarrow |v_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\right),$$

et donc $\quad v_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell$.

2. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = u_{n+1} - u_n$; donc $\alpha_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell$.

D'après 1. : $\dfrac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}}{n-1} \xrightarrow[n\infty]{} \ell$.

Mais, pour tout n de $\mathbb{N} - \{0, 1\}$:

$$\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}}{n-1} = \frac{u_n - u_1}{n-1} = \frac{u_n}{n-1} - \frac{u_1}{n-1}.$$

Comme $\dfrac{u_1}{n-1} \xrightarrow[n\infty]{} 0$, on déduit $\dfrac{u_n}{n-1} \xrightarrow[n\infty]{} \ell$, puis

$$\frac{u_n}{n} = \frac{u_n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \xrightarrow[n\infty]{} \ell.$$

3. On a : $\quad \ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\infty]{} \ln \ell$,

d'où, d'après 2. : $\dfrac{\ln u_n}{n} \xrightarrow[n\infty]{} \ln \ell$,

et donc : $\sqrt[n]{u_n} = \exp\left(\dfrac{\ln u_n}{n}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \ell$.

4. 1) $\quad u_n = \dbinom{2n}{n}$, $\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} 4$, donc $\sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 4$.

2) $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$

$$= \exp\left(n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(1 + o(1)) \xrightarrow[n\infty]{} \mathrm{e},$$

donc $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow[n\infty]{} \mathrm{e}$.

3) $u_n = \dfrac{n(n+1)\ldots(n+n)}{n^n}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(2n+1)}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{4}{\mathrm{e}},$$

donc $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\ldots(n+n)} \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

4) $u_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n^n}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{2}{\mathrm{e}},$$

donc $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

5) $u_n = \dfrac{(3n)!}{n^{2n}(n!)}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(3n+1)(3n+2)}{(n+1)^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{27}{\mathrm{e}^2},$$

donc $\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}} \xrightarrow[n\infty]{} \dfrac{27}{\mathrm{e}^2}$.