Séries numériques

Séries à termes de signe constant

1 Déterminer la nature des séries de terme général

1. $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$
2. $v_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$
3. $w_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
4. $x_n = \mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
5. $y_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n}$
6. $z_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}$
7. $s_n = \sin(2\operatorname{Arctan} n)$

2 Nature de $\sum \left|\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)\right|^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

3 Nature de $\sum \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Solution de 3 :

Si $\alpha = 0$, la série diverge grossièrement, sinon, $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui dit... absolument rien bien sûr.

L'idéal serait d'avoir un équivalent, on n'a pas cela dans les formulaires, mais on sait que $\sin x \sim x$ au voisinage de 0, donc, avec un calcul classique à savoir faire (avec discussion sur le signe...)

$$\operatorname{Arccos}\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right) \sim \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)\right) = \sqrt{1-\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)^2} = \sqrt{\frac{2n^\alpha+1}{(1+n^\alpha)^2}} \sim \frac{\sqrt{2}n^{\alpha/2}}{n^\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}} > 0$$

Par comparaison de séries à termes positifs et critère de Riemann,

$$\boxed{\sum \operatorname{Arccos}\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right) \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2}$$

(ce qui tient compte du cas $\alpha = 0$).

4 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes.

Montrer que $\sum \min(u_n, v_n)$, $\sum \max(u_n, v_n)$, $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \dfrac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ sont aussi convergentes.

5
1. Montrer que $\sum \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$ converge.
2. Montrer que pour tout n, $(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n \in 2\mathbb{Z}$.
3. Quelle est la nature de $\sum \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$?

6 Nature de $\sum a^{\ln n}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Solution de 6 :

On écrit

$$a^{\ln n} = e^{\ln n \ \ln a} = n^{\ln a}$$

puis on est ramené aux séries de Riemann.

7 Convergence de la suite de terme général $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(2-\mathrm{e}^{1/k}\right)$.

8 **Règle de Raabe-Duhamel** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = \ln(n^\alpha x_n)$.

1. Démontrer que la série $\sum(y_{n+1} - y_n)$ converge.
2. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_n \sim \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.
3. En déduire que la série $\sum x_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
4. Soit $a, b \in R_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b}u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) Démontrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $b - a > 1$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a-b+1)S_n = (n+a)u_n + (1-b)u_0$.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ lorsque $b - a > 1$.

9 **CCINP 5 et 6 : Série de Bertrand particulière et critère de D'Alembert**

Séries à termes quelconques

10 Déterminer la nature des séries de terme général

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
2. $v_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$
3. $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \sin n}$
4. $x_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$
5. $y_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$
6. $z_n = \sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{n}\right)$

11 Convergence de $\sum\left(\exp\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - 1\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

12 Soit $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $P_n \sim \dfrac{C}{\sqrt{n}}$.

13 Nature et somme éventuelle de $\sum\left(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}\right)$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

14 **CCINP 7 ; 8 et 46 : terme généraux équivalents et séries alternées**

15 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier l'existence de R_n et montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
2. Donner un équivalent de R_n et déterminer la nature de $\sum R_n$.

Solution de 15 :

1. Justifier l'existence de R_n et montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

La série harmonique alternée est convergente d'après le théorème spécial sur des séries alternée. On sait même calculer sa somme $-\ln 2$ soit à l'aide d'une intégrale, soit en utilisant le développement (classique aussi) de $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$. Car la somme partielle

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2j+1}$$

en séparant les termes d'indices pairs et impairs. Puis, comme dans Wallis, la somme des termes d'indices pairs se calcule facilement et la somme des termes d'indices impairs s'exprime à l'aide de l'autre somme. En effet,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} H_n$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2j+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} = H_{2n} - \frac{1}{2} H_n.$$

Donc

$$S_{2n} = H_n - H_{2n} = \ln n + \gamma - \left(\ln(2n) + \gamma\right) + o(1) = -\ln 2 + o(1)$$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$. Calcul à savoir faire.

Revenons à l'exercice. Plutôt que de risquer d'écrire des bêtises, on revient à des sommes finies.

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{p} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+2}^{p} \frac{(-1)^k}{k} &\underset{k=j+1}{=} \sum_{k=n+1}^{p} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{j=n+1}^{p-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j+1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{p} (-1)^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{(-1)^{p+1}}{p+1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{p} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} + \frac{(-1)^p}{p+1}\end{aligned}$$

Or $\frac{(-1)^p}{p+1} \to 0$ et $\sum \frac{(-1)^k}{n(n+1)}$ converge soit par le TSSA, soit car elle converge absolument, vu que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (télescopique) ou alors que $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$.

Donc, en faisant $p \to +\infty$, $\boxed{R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.}$

2. Donner un équivalent de R_n et déterminer la nature de $\sum R_n$.

Comme $R_{n+1} = R_n - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, on en déduit que $2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.

Comme le TSSA s'applique à $\sum \frac{(-1)^k}{n(n+1)}$ donc $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc $2R_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sim \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et enfin $\boxed{R_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n}.}$

Comme le signe n'est pas constant, il ne faut surtout pas se précipiter pour en déduire la nature de la série de terme général R_n.

Cependant, dans le calcul précédent, on avait plus précisément $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $R_n = u_n + v_n$ où $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ et $v_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. $\sum u_n$ converge par TSSA et $\sum v_n$ converge car elle converge absolument par comparaison de séries à termes généraux positifs.

Finalement, $\boxed{\sum R_n \text{ converge.}}$

16 **Transformation d'Abel** Il s'agit de l'analogue discret de l'intégration par parties.

1. Soit u une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{p} v_n u_n = v_p S_p + \sum_{n=0}^{p-1} (v_n - v_{n+1}) S_n.$$
2. Montrer que si l'on suppose la suite (S_n) bornée, la suite (v_n) décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.
3. Le théorème sur les séries alternées peut-il être considéré comme un cas particulier de ce résultat ?
4. Étudier suivant les valeurs des réels α et θ la nature de $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.
5. Obtenir, en revenant sous les hypothèses du 2, une majoration du reste.

Solution de 16 : Transformation d'Abel

1. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite à termes réels ou complexes, (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Soit $(v_n)_{n \geqslant 0}$ une suite à termes réels. Démontrer :
$$\sum_{n=0}^{p} v_n u_n \ = \ v_p S_p + \sum_{n=0}^{p-1} (v_n - v_{n+1}) S_n \quad .$$

La méthode la plus efficace est peut-être la récurrence. Mais on ne fait qu'une vérification, on ne voit pas comment la formule « apparaît ».

On peut aussi (sans faire de récurrence) partir du membre de droite pour essayer de parvenir au membre de gauche, ce qui est raisonnable, car il est plus naturel de partir de l'expression la plus compliquée pour la ramener à l'expression la plus simple. Les calculs sont les suivants et se résument par : on coupe en deux, on réindexe une des sommes, on les rassemble. Notons qu'on fait une réindexation sans changer le nom de l'indice, ce qui n'est pas particulièrement recommandé (risques d'erreur accrus) sauf dans des cas particulièrement simples comme ici.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{p-1}(v_n-v_{n+1})S_n &= \sum_{n=0}^{p-1} v_n S_n - \sum_{n=0}^{p-1} v_{n+1}S_n \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} v_n S_n - \sum_{n=1}^{p} v_n S_{n-1} \\ &= v_0S_0 - v_pS_{p-1} + \sum_{n=1}^{p-1} v_n(S_n-S_{n-1}) \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} v_n u_n - v_pS_{p-1} \\ &= \sum_{n=0}^{p} v_n u_n - v_pS_p\end{aligned}$$

La troisième méthode est de partir du membre de gauche, en remarquant que la manière naturelle de faire intervenir les S_n est d'écrire $u_n = S_n - S_{n-1}$ (quitte à poser $S_{-1}=0$ pour que ce soit valable si $n=0$). On écrit donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{p} u_n v_n &= \sum_{n=0}^{p}(S_n-S_{n-1})v_n \\ &= \sum_{n=0}^{p} v_nS_n - \sum_{n=0}^{p} v_nS_{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{p} v_nS_n - \sum_{n=1}^{p} v_nS_{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{p} v_nS_n - \sum_{n=0}^{p-1} v_{n+1}S_n \\ &= v_pS_p + \sum_{n=0}^{p-1}(v_n-v_{n+1})S_n\end{aligned}$$

Ce n'est pas la méthode la plus simple, mais on voit comment on « trouve » la formule.

2. On reprend les notations de la question précédente. Démontrer que si l'on suppose la suite (S_n) bornée et la suite (v_n) à termes positifs, décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

   Soit M tel que, pour tout n, $|S_n| \leqslant M$. Alors, pour tout n,

   $$|(v_n - v_{n+1})S_n| \leqslant (v_n - v_{n+1})M$$

   Le majorant est le terme général d'une série convergente (série télescopique associée à une suite convergente). Donc $\sum (v_n - v_{n+1})S_n$, absolument convergente, converge. De plus, la suite (v_pS_{p-1}) converge (vers 0) comme produit d'une suite bornée par une suite qui converge vers 0.

3. Retrouver le théorème sur les séries alternées en utilisant le résultat précédent.

   Prenant $u_n = (-1)^n$, les sommes partielles de la série (divergente) $\sum u_n$ sont bornées. Si on veut être plus précis, on a $S_n = 1$ si n est pair, $S_n = 0$ si n est impair, donc bien évidemment la suite (S_n) est bornée.

4. Etudier suivant les valeurs des réels α et θ la nature de la série

   $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$$

   (on pourra utiliser pour certaines valeurs de θ et α le résultat de la deuxième question).

   Si $\alpha \leqslant 0$, il y a divergence grossière.

   Si $\alpha > 1$, il y a convergence absolue (Riemann).

   Les cas où il n'y a ni convergence absolue ni divergence grossière sont les cas $0 < \alpha \leqslant 1$. On pose alors $u_n = e^{in\theta}$; si la suite (S_n) est bornée, on pourra conclure à la convergence par le résultat précédent. Or, si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

   $$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \\ &= \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\end{aligned}$$

   et donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad |S_n| \leqslant \dfrac{2}{|1-e^{i\theta}|}$. Donc la suite (S_n) est bornée.

   Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, le terme général de la série est $1/n^\alpha$, on retombe sur une série de Riemann divergente dans le cas $0 < \alpha \leqslant 1$.

   Finalement la série converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(0 < \alpha \leqslant 1$ et $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z})$.

5. On se place de nouveau sous les hypothèses de la deuxième question. On définit

   $$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k$$

   Si M est tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |S_n| \leqslant M$, trouver un majorant de $|R_n|$ en fonction de M et d'un terme de la suite v.

   Attention à ne pas écrire

   $$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k v_k &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}(S_k - S_{k-1})v_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} S_k v_k - \sum_{k=n}^{+\infty} v_{k+1}S_k\end{aligned}$$

   car à la deuxième ligne du calcul on sépare une somme de série convergente en deux « sommes » de séries non a priori convergentes, donc en deux termes qui n'existent pas. On résout cette difficulté en travaillant d'abord sur les sommes partielles avant de prendre les limites.

   De

   $$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p}(S_k - S_{k-1})v_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} v_{k+1}S_k \\ &= S_{n+p}v_{n+p} - v_{n+1}S_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(v_k - v_{k+1})S_k\end{aligned}$$

on déduit, en prenant la limite quand $p \to +\infty$,

$$R_n = -v_{n+1}S_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty}(v_k - v_{k+1})S_k$$

et donc

$$|R_n| \leqslant M\left(v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}(v_k - v_{k+1})\right) = 2M\,v_{n+1}$$

Calcul de sommes

17 Justifier leur bonne définition et calculer les sommes

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

18 Sachant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2-2}{n!}$.

19 Convergence et somme de

$$\sum \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{n^2+n+1}.$$

On pourra utiliser que $\frac{1}{n^2+n+1} = \frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}$...

20 Convergence et somme de $\displaystyle\sum\frac{\sin n\alpha}{2^n}$.

Comparaison avec des intégrales

21 Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

22 Déterminer un équivalent de $\ln n!$.

Solution de 21 :
$\frac{2}{3}n\sqrt{n}$

Solution de 22 :
$n\ln n$

23 Démontrer que si $|x| < 1$, la série $\displaystyle\sum\frac{x^n}{1+x^n}$ converge. Par comparaison à une intégrale, montrer que si l'on note $f(x)$ sa somme, $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{\ln 2}{1-x}$.

24 Soit $\alpha > 1$. Déterminer la nature de la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.

Sommation des relations de comparaison

25 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ et $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

1. Déterminer un équivalent simple de R_n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = u_n - v_n$. Démontrer que $w_n \sim \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
3. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

26 Soit u suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

1. Étudier la convergence de u et déterminer sa limite.
2. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ et en déduire un équivalent de u_n.

27 **Développement asymptotique de la série harmonique et de $n!$**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite (constante d'Euler).
2. Si $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $t_n = H_n - \ln n - \gamma$. Déterminer un équivalent de $t_{n+1} - t_n$ puis de t_n.
4. Raisonner de même pour montrer que $H_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
5. En s'inspirant de ce qui précède et en posant $u_n = \ln\left(\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\right)$, montrer que

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Solution de 27 : Développement asymptotique de la série harmonique et de $n!$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite (constante d'Euler).

Très classique, vu en cours. Pour montrer que la suite converge, on montre que la série télescopique associée converge. Or si $n \in \mathbb{N}$,

$$H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n - \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc, par comparaisons de séries à termes généraux positifs convergentes, la série de terme général $H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n - \ln n$ est absolument convergente donc convergente, et par suite, $\boxed{\text{la suite } (H_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers une limite } \gamma \in \mathbb{R}.}$

Remarque : On ne sait que peu de choses sur cette constante. Est-elle rationnelle ? irrationnelle ? Algébrique ? Transcendante ?

2. Si $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Là aussi, c'est classique et déjà vu. Par comparaison à une intégrale, $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant décroissante sur $[2,+\infty[$ de primitive $t \mapsto \frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}$, on a l'encadrement

$$\int_n^p \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{p+1} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{p-1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

puis en faisant $p \to +\infty$

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$$

d'où par encadrement $\boxed{R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.}$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $t_n = H_n - \ln n - \gamma$. Déterminer un équivalent de $t_{n+1} - t_n$ puis de t_n.

On calcule comme dans la première question en poussant plus loin le développement

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $t_{n+1} - t_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ et par comparaison de termes généraux positifs de séries convergentes, $\sum(t_n - t_{n+1})$ converge et les restes sont équivalents :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (t_k - t_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$$

soit, avec $t_n \to 0$, et la question précédente pour $\alpha = 2$,

$$t_n \sim \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot n} = \frac{1}{2n}$$

donc $\boxed{t_n \sim \frac{1}{2n}.}$ Ainsi, $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).}$

4. Raisonner de même pour montrer que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Puis en posant $u_n = H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2(n+1)} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{6n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

donc $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{6n^3}$ terme général positif de série convergente, donc par sommation dans le cas de convergence, $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{6k^3}$$

ce qui donne $-u_n \sim \frac{1}{6 \cdot 2n^2}$ en utilisant la question 2, soit $u_n \sim -\frac{1}{12n^2}$, ce qui permet de conclure $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$

5. En s'inspirant de ce qui précède et en posant $u_n = \ln\left(\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\right)$, montrer que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Avec le calcul déjà vu en cours,

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, donc (u_n) converge et les intégrales de Wallis permettent de trouver que $u_n \to \mathrm{e}^{\sqrt{2\pi}}$. On pose alors $v_n = u_n - \mathrm{e}^{\sqrt{2\pi}}$ et on reprend le calcul

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$v_{n+1} - v_n \sim -\frac{1}{12n^2}$$

Donc par sommation dans le cas de convergence, les termes étant positifs,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (v_k - v_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{12k^2}$$

Donc

$$v_n \sim \frac{1}{12n}$$

et $v_n = \frac{1}{12n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Puis, avec $w_n = v_n - \frac{1}{12n}$, on calcule [1] $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{120n^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$ d'où toujours sur le même principe, $w_{n+1} - w_n \sim \frac{1}{120n^4}$ puis $-w_n \sim \frac{1}{120 \cdot 3n^3}$ et $u_n = \mathrm{e}^{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Ainsi, $\frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} = \mathrm{e}^{u_n} = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)} = \sqrt{2\pi}\left(\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{144n^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{1728n^3}\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$.

On obtient donc, mieux que ce qui était attendu,

$$\boxed{n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{188n^2} - \frac{139}{51840n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).}$$

1. En réalité, j'ai utilisé `xcas` :
```
series(1 - (n + 1/2) * ln(1 + 1/n) - 1/(12*(n + 1)) + 1/(12*n), n=+infinity, 3)
```