Séries numériques

- Ne jamais parler de la somme d'une série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ avant d'avoir démontré la convergence de la série.
- En général, pour étudier la convergence d'une série $\sum u_n$, c'est à la suite u_n que l'on s'intéresse, rarement aux sommes partielles.
- La première des choses à faire est de vérifier si le terme général est de signe constant. Si ce n'est pas le cas, on peut essayer de montrer l'absolue convergence qui implique la convergence.
- On peut utiliser des o ou O : pour des termes généraux réels positifs a priori, mais $u_n = \mathrm{o}(\dots)$ et $\|u_n\| = \mathrm{o}(\dots)$ signifiant la même chose, c'est une technique de démonstration d'absolue convergence.
- Avec un équivalent : attention, cette fois-ci il faut **absolument** que les termes soient réels positifs (ou en tout cas de signe constant) à partir d'un certain rang.
- Pour les séries à termes de signe non constant et non absolument convergentes, on peut utiliser le théorème sur les séries alternées, en vérifiant **toutes** les hypothèses de celui-ci (un $(-1)^n$ ne suffit pas !). Si ce n'est pas possible, il reste la solution du développement asymptotique.
- La comparaison à une intégrale (surtout pour les termes généraux réels positifs) peut servir (parfois) à conclure sur la convergence, trouver des équivalents de sommes partielles, de restes, etc.
- Enfin, pour le calcul de sommes d'une séries, les techniques les plus courantes sont de faire apparaître des sommes télescopiques (parfois via une décomposition en éléments simples), ou se ramener à une somme connue : géométrique, exponentielle (vous aurez un catalogue intéressant dans le chapitre sur les séries entières).
- Attention sur la manipulation des sommes de séries : $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)$ peut exister alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ ne sont pas définies... Y réfléchir à deux fois avant d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n+\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Séries à termes de signe constant

1 Déterminer la nature des séries de terme général

1. $u_n = \sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$
2. $v_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$
3. $w_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
4. $x_n = \mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
5. $y_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n}$
6. $z_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}$
7. $s_n = \sin(2\operatorname{Arctan} n)$

2 Nature de $\sum\left|\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)\right|^\alpha$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.

3 Nature de $\sum \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$ où $\alpha\in\mathbb{R}^+$.

4 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes.

Montrer que $\sum \min(u_n,v_n)$, $\sum \max(u_n,v_n)$, $\sum\sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \dfrac{u_n v_n}{u_n+v_n}$ sont aussi convergentes.

5
1. Montrer que $\sum \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$ converge.
2. Montrer que pour tout n, $(2-\sqrt{3})^n+(2+\sqrt{3})^n\in 2\mathbb{Z}$.
3. Quelle est la nature de $\sum \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$?

6 Nature de $\sum a^{\ln n}$ où $a\in\mathbb{R}_+^*$.

7 Convergence de la suite de terme général $\prod_{k=2}^{n}\left(2-\mathrm{e}^{1/k}\right)$.

8 **Règle de Raabe-Duhamel** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1-\dfrac{\alpha}{n}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $y_n=\ln(n^\alpha x_n)$.

1. Démontrer que la série $\sum(y_{n+1}-y_n)$ converge.
2. Démontrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $x_n\sim\dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.
3. En déduire que la série $\sum x_n$ converge si et seulement si $\alpha>1$.
4. Soit $a,b\in R_+^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0>0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{n+a}{n+b}u_n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$.
   (a) Démontrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $b-a>1$.
   (b) Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(a-b+1)S_n=(n+a)u_n+(1-b)u_0$.
   (c) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ lorsque $b-a>1$.

9 **CCINP 5 et 6 : Série de Bertrand particulière et critère de D'Alembert**

Séries à termes quelconques

10 Déterminer la nature des séries de terme général

1. $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
2. $v_n=\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$
3. $w_n=\dfrac{(-1)^n}{n+\sin n}$
4. $x_n=\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$
5. $y_n=\dfrac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n}$
6. $z_n=\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{n}\right)$

11 Convergence de $\sum\left(\exp\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)-1\right)$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.

12 Soit $P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1+\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$. Montrer qu'il existe $C>0$ tel que $P_n\sim\dfrac{C}{\sqrt{n}}$.

13 Nature et somme éventuelle de $\sum\left(\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}\right)$ où $a,b\in\mathbb{R}$.

14 **CCINP 7 ; 8 et 46 : terme généraux équivalents et séries alternées**

15 Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier l'existence de R_n et montrer que $R_n+R_{n+1}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
2. Donner un équivalent de R_n et déterminer la nature de $\sum R_n$.

16 **Transformation d'Abel** Il s'agit de l'analogue discret de l'intégration par parties.

1. Soit u une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ et $(v_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{p}v_n u_n=v_pS_p+\sum_{n=0}^{p-1}(v_n-v_{n+1})S_n.$$
2. Montrer que si l'on suppose la suite (S_n) bornée, la suite (v_n) décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum u_n v_n$ converge.
3. Le théorème sur les séries alternées peut-il être considéré comme un cas particulier de ce résultat ?
4. Étudier suivant les valeurs des réels α et θ la nature de $\sum\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n^\alpha}$.
5. Obtenir, en revenant sous les hypothèses du 2, une majoration du reste.

Calcul de sommes

17 Justifier leur bonne définition et calculer les sommes
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\quad\text{et}\quad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

18 Sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2-2}{n!}$.

19 Convergence et somme de
$$\sum\operatorname{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1}.$$
On pourra utiliser que $\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}\cdots$

20 Convergence et somme de $\sum\frac{\sin n\alpha}{2^n}$.

Comparaison avec des intégrales

21 Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

22 Déterminer un équivalent de $\ln n!$.

23 Démontrer que si $|x|<1$, la série $\sum\frac{x^n}{1+x^n}$ converge. Par comparaison à une intégrale, montrer que si l'on note $f(x)$ sa somme, $f(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\frac{\ln 2}{1-x}$.

24 Soit $\alpha>1$. Déterminer la nature de la série de terme général $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.

Sommation des relations de comparaison

25 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\frac{1}{n^2}$, $v_n=\frac{1}{n(n+1)}$ et $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

1. Déterminer un équivalent simple de R_n.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $w_n=u_n-v_n$. Démontrer que $w_n\sim\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
3. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $R_n=\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

26 Soit u suite définie par $u_0>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\ln(1+u_n)$.

1. Étudier la convergence de u et déterminer sa limite.
2. Déterminer la limite de $\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}$ et en déduire un équivalent de u_n.

27 **Développement asymptotique de la série harmonique et de $n!$**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(H_n-\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite (constante d'Euler).
2. Si $\alpha>1$, déterminer un équivalent de $R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.
3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $t_n=H_n-\ln n-\gamma$. Déterminer un équivalent de $t_{n+1}-t_n$ puis de t_n.
4. Raisonner de même pour montrer que $H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
5. En s'inspirant de ce qui précède et en posant $u_n=\ln\left(\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\right)$, montrer que
$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$