

Suites (révisions)

1 Si A et B sont deux parties non vides majorées de \mathbb{R} , étudier les bornes supérieures de $A \cup B$, $A + B$ et λA pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

2 Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Lorsqu'il y a une limite finie ℓ , donner un équivalent de $u_n - \ell$.

3 Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.

4 Soit u une suite telle que (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Prouver que u converge.

5 Théorème de Cesàro – lemme de l'escalier

1. Prouver le théorème de Cesàro : si $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{C}$, alors $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \rightarrow \ell$, et le résultat est toujours valable si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\ell = \pm\infty$. La réciproque est-elle vraie ?

2. En déduire le lemme de l'escalier : si $u_{n+1} - u_n \rightarrow \ell$ alors $\frac{u_n}{n} \rightarrow \ell$.

3. Montrer que si $u \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$, alors $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell$.

4. Déterminer les limites des suites de terme général $\left(\frac{2n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$; $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;
 $\frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots(n+n)}}{n}$; $\frac{\sqrt[n]{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}}{n}$; $\frac{1}{n^2} \sqrt{\frac{(3n)!}{n!}}$.

6 Irrationalité de e

On pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$. Montrer que les deux suites convergent vers une même

limite : on admettra qu'elle vaut e. En déduire que e est irrationnel.

On pourra remarquer que si $e = \frac{p}{q}$, $u_q < e < v_q$...

7 Moyennes et suites de Schwob

1. Les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique de deux réels strictement positifs a, b sont respectivement $\frac{2}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$, \sqrt{ab} , $\frac{a+b}{2}$. Montrer que ces nombres sont ainsi rangés dans l'ordre croissant.

2. Soient a et b des nombres réels strictement positifs. On définit les suites u et v par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et si $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$.

Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b . On ne peut pas l'exprimer simplement avec les fonctions usuelles.

3. Soient a et b des nombres réels strictement positifs. On définit les suites u et v par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et si $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{2}{\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}\right)}$.

Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite que l'on déterminera.

8 Soit u une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell$.

(a) Montrer que si $\ell < 1$ alors $u_n \rightarrow 0$.

(b) Montrer que si $\ell > 1$ alors $u_n \rightarrow +\infty$.

(c) Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

2. Mêmes questions si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$.

9 CCINP 43 (suite récurrente ; équation fonctionnelle)

Analyse asymptotique (révisions)

- Ne pas oublier qu'on ne peut pas en général additionner ou composer avec une fonction (même continue) des équivalents. Obtenir un équivalent nul ne doit (quasiment) jamais arriver ! Bien retenir que $u \sim v$ si et seulement si $u = v + o(v)$. Il faut connaître l'échelle de comparaison des suites usuelles.
- Pour déterminer un équivalent (pour calculer une limite par exemple) en $a \neq 0$, on fait en général un changement de variable $x = a + h$ pour se ramener au voisinage de 0, et utiliser les équivalents usuels.
- Lorsque l'on demande un DL :
 - La première chose à faire est de se ramener au voisinage de 0 en posant $h = x - a$ ou $h = \frac{1}{x}$. Et, bien sûr, connaître PARFAITEMENT les développements limités usuels (il y a des moyens mnémotechniques (ou logiques) pour les retenir!).
 - Ensuite, voir si des propriétés de parité peuvent simplifier les calculs.
 - Il est souvent difficile de savoir à quel ordre on doit développer chaque terme : prendre le temps d'y réfléchir, et se dire que plus on développe loin, plus on a des chances de faire des erreurs de calcul.
 - Attention à aller assez loin dans le développement d'une composée pour ne pas oublier de terme non négligé.
 - Lorsque l'on a un quotient, on fait en général apparaître du $\frac{1}{1 \pm u}$.
 - TOUJOURS mettre les termes d'un DL par ordre croissant de négligeabilité. Cela évite bien des erreurs.
- L'une des principales applications des DL est la recherche d'équivalent (et donc de limite). C'est facile, c'est le terme le plus fort (le premier) qui est l'équivalent le plus simple.
- L'autre utilisation classique est celle en géométrie, cela simplifie beaucoup les calculs d'asymptote (et de position de la courbe par rapport à celle-ci).
- Les développements asymptotiques sont en général difficiles. On retiendra que si on note f_k le k^{e} terme, on a alors $f_{k+1} \sim f - f_1 - \dots - f_k$.
- Si vous avez une calculatrice qui fait du calcul formel, elle sait calculer des développements limités. Sinon, aller sur <http://www.xcasenligne.fr> ou installer l'application xcas et utiliser l'instruction `series(f(x), x=a, n)` ou demander gentiment à Wolfram alpha pour obtenir un $DL_n(a)$ de f pour vérifier vos calculs.

10 CCINP 1 (équivalents et signe)

11 Classer par ordre de prédominance (avec la relation \ll) les suites de termes généraux

$$(\ln n)^3, \ln(n^3), \frac{3^n}{n^3}, 2^n, e^{n/2}, (\ln(\ln n))^n, n \ln(\ln n), n \ln n.$$

12 Classer par ordre de prédominance (avec la relation \ll) les suites de termes généraux

$$\frac{1}{n^4}, \frac{\ln n}{n^5}, \frac{2^n}{1+3^n}, 2^{-\ln(\ln n)}, \frac{\ln(\ln n)}{\ln n + n}, \frac{\ln n}{2^n + n^2}, \frac{\tan(1/n)}{1 + \cos^3(1/n)}, (\cos(1/n))^{\sin(1/n)} - 1.$$

13 Donner un équivalent simple de $\cos\left(\pi n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.

14 On pose pour $n \in \mathbb{N}$, u_n l'unique solution de $\tan x = x$ sur $\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$.

1. Montrer que u_n est bien défini.
2. Étudier la monotonie et la limite de (u_n) .
3. Trouver un équivalent de u_n .
4. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n en exprimant $v_n = u_n - n\pi$ à l'aide d'une arctangente.
5. Donner un développement asymptotique à 4 termes de u_n en réutilisant v_n .

15 Déterminer un équivalent en $\frac{\pi}{4}$ de $\left(\tan 2x + \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

16 Déterminer un équivalent en 1 de Arccos .

17 Déterminer les développements limités

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\text{DL}_4(0)$ de $\frac{x}{e^x - 1}$ | 5. $\text{DL}_4(0)$ de $\ln \frac{\ln(1+x)}{x}$ | 10. $\text{DL}_3(1)$ de \sqrt{x} |
| 2. $\text{DL}_4(0)$ de $\frac{x}{\tan x}$ | 6. $\text{DL}_4(0)$ de $(\cos x)^{1+\sin x}$ | 11. $\text{DL}_2(0)$ de $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\cos x - 1}}$ |
| 3. $\text{DL}_4(0)$ de $(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$ | 7. $\text{DL}_4(0)$ de $\sqrt{1+\tan x}$ | 12. $\text{DL}_{1000}(0)$ de $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$ |
| 4. $\text{DL}_4(0)$ de $\ln(1+x+\sqrt{1+x})$ | 8. $\text{DL}_5(0)$ de $\frac{x}{\sin x}$ | |
| | 9. $\text{DL}_6(0)$ de $\text{ch } x \sin x$ | |

18 Déterminer un équivalent simple en 0 de

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\sqrt{\sin x} - \sqrt{\text{sh } x}$ | 2. $\frac{\sin x + \text{sh } x - 2x}{x(\cos x + \text{ch } x - 2)}$ | 3. $\sin x + a \tan x + b \sin^3 x$ où a, b réels |
|--|--|---|

19 Montrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^{x^2} \end{cases}$ admet une application réciproque définie sur \mathbb{R} et en donner un $\text{DL}_5(0)$.

20 Déterminer le DL_6 en $+\infty$ de $\ln\left(x \tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

21 Étudier les limites

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ en 0 | 3. $x^{\frac{1}{1-x}}$ en 1 | 5. $\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}{(1+\tan x)^{\frac{1}{x}} - e^{\cos \sqrt{x}}}$ en 0 |
| 2. $\frac{\ln x}{x^2 + x - 2}$ en 1 | 4. $(\pi - 2x) \tan x$ en $\frac{\pi}{2}$ | |