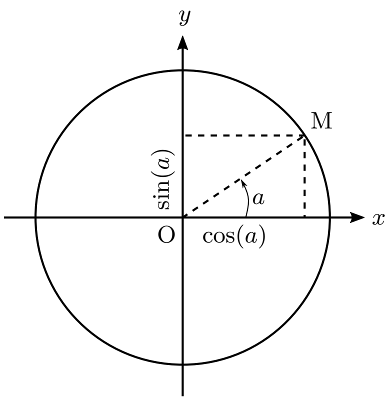
Outils mathématiques

1 Alphabet grec

Alpha	A	α
Bêta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ϵ
Zêta	Z	ζ
Êta	H	η
Thêta	Θ	θ
Iota	I	ι
Kappa	K	κ
Lambda	Λ	λ
Mu	M	μ

Nu	N	ν
Ksi	Ξ	ξ
Omicron	O	o
Pi	Π	π
Rho	P	ρ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Upsilon	Y	υ
Phi	Φ	φ
Khi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Oméga	Ω	ω

2 Trigonométrie



- $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$
- $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$
  $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
  $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
  $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$
- $\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(a)$ et $\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(a)$
- $\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$ et $1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$

Formules d'addition

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Formules de linéarisation

- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b) + \sin(a+b)\right)$
- $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

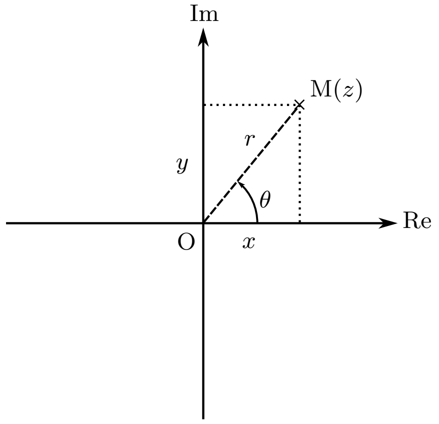
Formules de duplication

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
  $= 2\cos^2(a) - 1$
  $= 1 - \sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Formules de factorisation

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

3 Nombres complexes



— L'affixe du point M s'écrit $z = x + \mathrm{i}y$
— $x = \mathrm{Re}(z)$ est la partie réelle de z
— $y = \mathrm{Im}(z)$ est la partie imaginaire de z
— Son complexe conjugué s'écrit $z^* = x - \mathrm{i}y$.

En coordonnées polaires, l'affixe peut aussi s'exprimer sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)$.

— $r = |z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le module (ou rayon)
— $\theta = \arg(z)$ est l'argument (ou phase) de z.
  — Si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, alors $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
  — Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$, alors $\theta = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Rappelons quelques formules :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

4 Dérivées et primitives usuelles

Fonction	**Dérivée**
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
x^n, $n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$

Fonction	**Primitive**
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$x^n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$

— Dérivée d'une fonction composée :

$$\frac{\mathrm{d}g[f(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}g[f(x)]}{\mathrm{d}f}$$

5 Développements limités

Formule de Taylor-Young

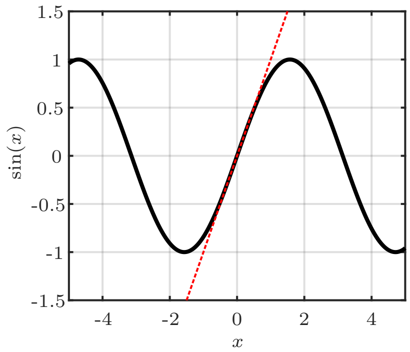
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Si f est dérivable n fois et de dérivée n^{ieme} continue, alors pour tout $x \in I$, on peut approcher cette fonction par un polynôme de la forme :

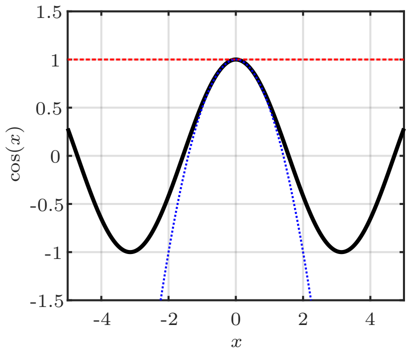
$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

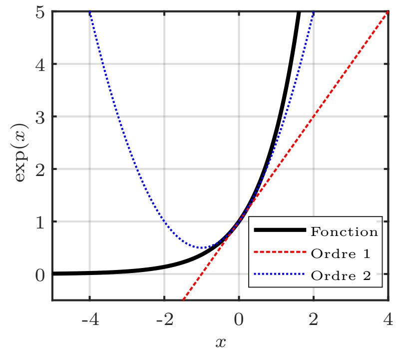
où $o((x - x_0)^n)$ est une fonction négligeable devant le monôme $(x - x_0)^n$.

Exemples

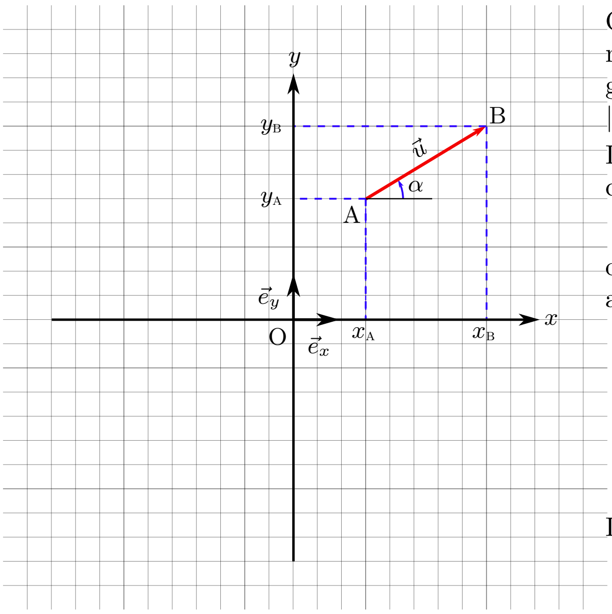
$\mathbf{DL}_2(0)\ \lvert x \rvert \ll 1$
$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + x^2$
$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$
$\mathrm{e}^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2}$
$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2}$
$\cos(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$
$\sin(x) \simeq x$
$\tan(x) \simeq x$







6 Projection de vecteurs dans un repère cartésien



On dispose d'un repère (Oxy) muni d'une base orthonormée dont les vecteurs de base sont $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, orthogonaux entre eux $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$ et de norme égale à 1 : $\parallel \vec{e}_x \parallel = \parallel \vec{e}_y \parallel = 1$.

Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ se décompose dans le repère (Oxy) comme suit :

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$$

où u_x et u_y sont les composantes du vecteur $\vec{u}$ selon les axes Ox et Oy.

$$\begin{aligned} u_x &= x_B - x_A \\ &= \vec{u} \cdot \vec{e}_x = \parallel \vec{u} \parallel \parallel \vec{e}_x \parallel \cos\alpha = AB\cos\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= y_B - y_A \\ &= \vec{u} \cdot \vec{e}_y = \parallel \vec{u} \parallel \parallel \vec{e}_y \parallel \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = AB\sin\alpha \end{aligned}$$

La norme du vecteur $\vec{u}$ s'écrit :

$$\parallel \vec{u} \parallel = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

7 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de $\vec{v}_1$ et de $\vec{v}_2$ est le vecteur $\vec{w}$, noté $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ et ayant pour composantes, dans la base orthonormée directe :

$$\vec{w} \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \text{ avec } \vec{v}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

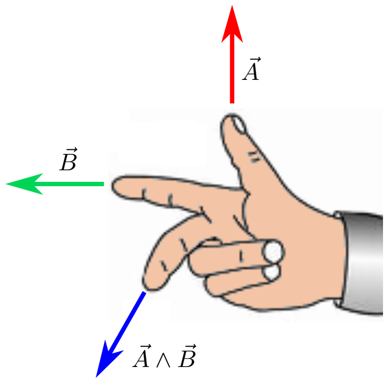
Nous retiendrons les propriétés suivantes :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$$

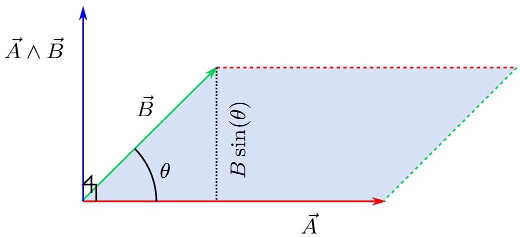
$$\lambda(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = (\lambda\vec{v}_1) \wedge \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \wedge (\lambda\vec{v}_2)$$

$$\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3$$

Enfin il est possible d'obtenir $\vec{w} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ sans projeter les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$:
— direction de $\vec{w}$: orthogonale à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$ (attention $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas à priori orthogonaux).
— sens de $\vec{w}$: tel que ($\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$,$\vec{w}$) soit direct (règle du tire bouchon ou des trois doigts de la main droite)



— norme de $\vec{w}$: $\|\vec{w}\| = \|\vec{v}_1\| \, \|\vec{v}_2\| \, | \sin(\widehat{\vec{v}_1, \vec{v}_2}) \, |$. La norme de $\vec{w}$ représente l'air du parallélogramme construit sur $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.



Remarque : Une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs soient colinéaires est que leur produit vectoriel soit nul.

8 Équations différentielles

Une équation différentielle est une équation reliant une fonction f de x, la variable x et les dérivées de la fonction f. Le plus grand ordre des dérivées de la fonction f donne l'ordre de l'équation différentielle.

La solution d'une équation différentielle doit toujours être justifiée par une identification précise du type d'équation à résoudre.

8.1 Équation différentielle du premier ordre

8.1.1 Équation à variables séparées

Dans une équation de la forme $f'F(f) = G(x)$, on peut séparer ce qui concerne f de ce qui concerne x. $f' = \frac{df}{dx}$ avec df et dx différentielles, il vient $df F(f) = G(x)dx$. On peut alors intégrer chaque membre et en tirer $f(x)$.

Exemple : $f^2 f' = \cos(x)$

$$f^2 df = \cos(x)dx$$

$$f^3/3 = \sin(x) + C_1$$

d'où $f(x) = (3\sin(x) + C_2)^{1/3}$. La constante d'intégration C_2 est à fixée par les conditions aux limites.

8.1.2 Équation différentielle linéaire à coefficients constants

L'équation différentielle est de la forme : $f' + af = G(x)$ avec a une constante. La résolution a lieu en deux étapes :

1. Recherche de la solution à l'équation homogène $f' + af = 0$, notée f_h. Celle-ci s'écrit $f_h = A\exp(-ax)$.
2. Recherche d'une solution particulière f_p. Deux méthodes existent :
   — On pose $f_p(x) = \lambda(x)\exp(-ax)$ et on le remplace dans l'équation. On en déduit $\lambda'(x)$, puis $\lambda(x)$.
   — On cherche directement y_p de la même forme que le second membre $G(x)$ de l'équation différentielle (comme une constante par exemple).

La solution s'écrit donc $f(x) = f_h(x) + f_p(x)$.

8.2 Équation différentielle du deuxième ordre

8.2.1 Équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants sans second membre

L'équation différentielle est du type $af'' + bf' + cf = 0$, avec a, b et c des coefficients constants. On recherche des solutions de la forme $\exp(rx)$ avec r un inconnu mais constant. Il vient :

$$\exp(rx)(ar^2 + br + c) = 0$$

pour tout x donc

$$ar^2 + br + c$$

Cette équation est appelée équation caractéristique. Il existe alors trois cas :

— $b^2 - 4ac$ >0. L'équation caractéristique admet alors deux racines réelles r_1 et r_2 et la solution s'écrit :

$$f(x) = A\exp(r_1x) + B\exp(r_2x)$$

avec A et B deux constantes à déterminer.

— $b^2 - 4ac$ <0. L'équation caractéristique admet alors deux racines complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + j\beta$ et $r_2 = \alpha - j\beta$ (avec j^2 =-1). La solution s'écrit :

$$f(x) = \exp(\alpha x)(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$$

avec A et B deux constantes à déterminer ou

$$f(x) = \exp(\alpha x)C\cos(\beta x + \phi)$$

avec C et ϕ deux constantes à déterminer

— $b^2 - 4ac$ <=0. L'équation caractéristique admet alors une seule solution réelle $r = \frac{-b}{2a}$ et la solution s'écrit :

$$f(x) = (A + Bx)\exp(rx)$$

avec A et B deux constantes à déterminer.

8.2.2 Équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants avec second membre

L'équation différentielle est du type $af'' + bf' + cf = G(x)$, avec a, b et c des coefficients constants. La solution est alors la somme de la solution de l'équation homogène associée ($af'' + bf' + cf = 0$) f_h et d'une solution particulière f_p. Le paragraphe précédent détaille l'obtention de la solution f_h. Nous nous attachons ici à obtenir f_p.

— Si $G(x)$ est une constante alors f_p est une constante.

— Si $G(x)$ est un polynôme de degré n en x, on recherche f_p sous la forme d'un polynôme de degré n. On trouve les coefficients de ce polynôme en remplaçant f par ce polynôme dans l'équation différentielle et en les identifiant. Si $c = 0$, f_p est un polynôme de degré $n + 1$; si $c = 0$ et $b = 0$, f_p est un polynôme de degré $n + 2$.

— Si $G(x)$ est du type $k\cos(\omega x)$, on cherche f_p de la forme $p\cos(\omega x) + q\sin(\omega x)$, on détermine p et q en remplaçant dans l'équation et en identifiant les termes en cosinus d'une part et les terme en sinus d'autre part. Attention, si $\pm\omega j$ sont racines de l'équation caractéristique (autrement dit, $\omega = \beta$), alors p et q ne sont pas des constantes mais des fonctions.

- Si $G(x)$ est du type $k\exp(\alpha x)$, on cherche $f_p(x) = \lambda\exp(\alpha x)$, et λ en injectant cette solution dans l'équation différentielle. Là aussi, il faut faire attention à ce que α ne soit pas solution de l'équation caractéristique, sinon λ n'est pas une constante ($\lambda = Kx$ si α est une racine simple et $\lambda = Kx^2$ si α est une racine double).
- Si $G(x)$ est une somme de fonction, on recherche une solution particulière pour chacune des fonctions et f_p sera la somme de ces solutions particulières.

On obtient ainsi la solution $f(x) = f_h(x) + f_p(x)$. Les constantes éventuelles sont obtenues à l'aide des conditions aux limites.