Concours commun des Ecoles des Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes

Correction de l'épreuve spécifique MPSI ; 2008

Olivier HALGAND

Problème 1.

Etude d'une inégalité

1. Par équivalences, en considérant $x = \mathcal{R}\mathrm{e}(a)$ et $y = \mathcal{I}\mathrm{m}(a)$:

$$|a| = \mathcal{R}\mathrm{e}(a) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2 = x^2 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases},$$

d'où :

$$\boxed{|a| = \mathcal{R}\mathrm{e}(a) \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathbb{R}_+.}$$

2. On a : $\forall z, \omega \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \big(|z|+|\omega|\big)^2 - |z+\omega|^2 &= |z|^2 + 2|z|\,|\omega| + |\omega|^2 - (z+\omega)\big(\overline{z+\omega}\big) \\ &= z\overline{z} + 2|z|\,|\omega| + \omega\overline{\omega} - z\overline{z} - z\overline{\omega} - \overline{z}\omega - \omega\overline{\omega} \\ &= 2|z|\,|\omega| - \big(z\overline{\omega} + \overline{z\overline{\omega}}\big) \\ &= 2|z|\,|\omega| - 2\mathcal{R}\mathrm{e}\big(z\overline{\omega}\big) \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\forall z, \omega \in \mathbb{C}, \quad \big(|z|+|\omega|\big)^2 - |z+\omega|^2 = 2\Big(|z|\,|\omega| - \mathcal{R}\mathrm{e}\big(z\overline{\omega}\big)\Big).}$$

3. On sait que : $\forall a \in \mathbb{C},\ |a| \geqslant \mathcal{R}\mathrm{e}(a)$. Donc : $\forall z, \omega \in \mathbb{C},\ |z\overline{\omega}| \geqslant \mathcal{R}\mathrm{e}\big(z\overline{\omega}\big)$. On en déduit donc que :

$$\big(|z|+|\omega|\big)^2 - |z+\omega|^2 = 2\Big(|z|\,|\omega| - \mathcal{R}\mathrm{e}\big(z\overline{\omega}\big)\Big) \geqslant 0,$$

donc :

$$\big(|z|+|\omega|\big)^2 - |z+\omega|^2 \geqslant 2\Big(|z|\,|\omega| - \mathcal{R}\mathrm{e}\big(z\overline{\omega}\big)\Big),$$

et puisque ce sont des nombres réels positifs, on en déduit :

$$\boxed{\forall z, \omega \in \mathbb{C}, \quad |z|+|\omega| \geqslant |z+\omega|.}$$

De plus, d'après **2.**, il y a égalité si, et seulement si : $|z|\,|\omega| = \mathcal{R}\mathrm{e}\big(z\overline{\omega}\big)$, c'est-à-dire, d'après **1.**, si, et seulement si : $z\overline{\omega} \in \mathbb{R}_+$. Or, si $\omega = 0$ alors c'est évident, et si $\omega \neq 0$ on obtient :

$$z\overline{\omega} = \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad \Leftrightarrow \quad z\overline{\omega}\omega = \lambda\omega \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\lambda}{|\omega|^2}\,\omega, \quad \text{avec : } \frac{\lambda}{|\omega|^2} \in \mathbb{R}_+.$$

Finalement, il y a égalité si, et seulement si$z$ et ω sont positivement proportionnels, ou, en termes géométriques :

$$\boxed{|z+\omega| = |z|+|\omega| \quad \Leftrightarrow \quad M(z) \text{ et } \Omega(\omega) \text{ sont situés sur une même demi-droite issue de l'origine.}}$$

La notion de $(p\ :\ q)$ point

4. Par équivalences :

$$\frac{z-a}{b-z}=\frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad q(z-a)=p(b-z) \quad \Leftrightarrow \quad qz+pz=qa+pb,$$

et comme $p+q\neq 0$ par hypothèse, on obtient l'unique solution :

$$\boxed{\frac{z-a}{b-z}=\frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{qa+pb}{p+q},}$$

c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{Le } (p\ :\ q) \text{ de } A \text{ à } B \text{ est le baycentre du système : } \Big((A,q),(B,p)\Big).}$$

5. Pour $\alpha\in\,]0,+\infty[$, alors αp et αq sont encore des réels strictement positifs et : $\dfrac{\alpha p}{\alpha q}=\dfrac{p}{q}$, et donc :

$$\boxed{\text{le } (p\ :\ q) \text{ point de } A \text{ à } B \text{ est égal au } (\alpha p\ :\ \alpha q) \text{ point de } A \text{ à } B.}$$

6. D'après **4.**, le $(1\ :\ 1)$ de $A(a)$ à $B(b)$ a pour affixe $\dfrac{a+b}{2}$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{le } (1\ :\ 1) \text{ point de } A \text{ à } B \text{ est le milieu du segment } [AB].}$$

7. Si on note x et y les affixes respectives de X et Y, alors, d'après **4.**, on a :

$$x=\frac{qa+pb}{p+q} \quad \text{et :} \quad y=\frac{qa+pc}{p+q}.$$

On en déduit que :

$$y-x=\frac{pc-pb}{p+q}=\frac{p}{p+q}(c-b), \quad \text{soit :} \quad \overrightarrow{XY}=\frac{p}{p+q}\overrightarrow{BC}.$$

ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, et donc :

$$\boxed{\text{les droites } (XY) \text{ et } (BC) \text{ sont parallèles.}}$$

La notion de $(p\ :\ q)$ sous-triangle

8. Evidemment :

$$\boxed{\text{l'affixe de l'isobarycentre du triangle } \Delta(ABC) \text{ est } \frac{a+b+c}{3}.}$$

9. L'isobarycentre du triangle $\Delta(A'B'C')$ a pour affixe :

$$\frac{a'+b'+c'}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{qa+pb}{p+q}+\frac{qb+pc}{p+q}+\frac{qc+pa}{p+q}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{(p+q)(a+b+c)}{p+q}\right)=\frac{a+b+c}{3}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{les triangles } \Delta(ABC) \text{ et } \Delta(A'B'C') \text{ ont le même isobarycentre.}}$$

Etude de suites

10. Comme à la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = \frac{qa_k + pb_k}{p+q},\ b_{k+1} = \frac{qb_k + pc_k}{p+q},\ c_{k+1} = \frac{qc_k + pa_k}{p+q},$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}.}$$

11. • Comme en **9.**, on a les égalités : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} + c_{k+1} = \frac{(p+q)(a_k + b_k + c_k)}{p+q} = a_k + b_k + c_k = \alpha_k.$$

Donc, la suite (α_k) est géométrique de raison 1, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{la suite } (\alpha_k) \text{ est constante et converge vers } a_0 + b_0 + c_0.}$$

• De même, en utilisant le fait que $j^3 = 1$: $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} &= a_{k+1} + jb_{k+1} + j^2 c_{k+1} = \frac{(qa_k + pb_k) + j(qb_k + pc_k) + j^2(qc_k + pa_k)}{p+q} \\ &= \frac{(q + j^2 p)a_k + (p + jq)b_k + (jp + j^2 q)c_k}{p+q} = \frac{q + j^2 p}{p+q}(\underbrace{a_k + jb_k + j^2 c_k}_{\beta_k}). \end{aligned}$$

Donc, la suite (β_k) est géométrique de raison $\dfrac{q + j^2 p}{p+q}$. Or, q et $j^2 p$ ne sont pas positivement proportionnels, donc, d'après **3.** :

$$\left| \frac{q + j^2 p}{p+q} \right| = \frac{|q + j^2 p|}{|p+q|} < \frac{|q| + |j^2 p|}{p+q} = \frac{q+p}{p+q} = 1.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (\beta_k) \text{ est géométrique de raison } \frac{q + j^2 p}{p+q} \text{ et converge vers } 0.}$$

• De la même manière, toujours en utilisant le fait que $j^3 = 1$: $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} &= a_{k+1} + j^2 b_{k+1} + jc_{k+1} = \frac{(qa_k + pb_k) + j^2(qb_k + pc_k) + j(qc_k + pa_k)}{p+q} \\ &= \frac{(q + jp)a_k + (p + j^2 q)b_k + (j^2 p + jq)c_k}{p+q} = \frac{q + jp}{p+q}(\underbrace{a_k + j^2 b_k + jc_k}_{\gamma_k}). \end{aligned}$$

Donc, la suite (γ_k) est géométrique de raison $\dfrac{q + jp}{p+q}$. Or, q et jp ne sont pas positivement proportionnels, donc, d'après **3.** :

$$\left| \frac{q + jp}{p+q} \right| = \frac{|q + jp|}{|p+q|} < \frac{|q| + |jp|}{p+q} = \frac{q+p}{p+q} = 1.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (\gamma_k) \text{ est géométrique de raison } \frac{q + jp}{p+q} \text{ et converge vers } 0.}$$

12. La matrice Q est une matrice de permutation. Quand on multiplie une matrice B à gauche par Q, cela revient à permuter les colonnes 2 et 3 de B ; quand on multiplie une matrice B à droite par Q, cela revient à permuter les lignes 2 et 3 de B. Donc, ici :

$$\boxed{\text{la matrice } C \text{ est obtenue à partir de la matrce } B \text{ en permutant ses colonnes 2 et 3.}}$$

13. On a, compte-tenu de l'égalité $1+j+j^2=0$:

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & j-1 & j^2-1 \\ 0 & j^2-1 & j-1 \end{vmatrix} = (j-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & j+1 \\ 0 & j+1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (j^2-2j+1)\left[1-(j+1)^2\right] = (1+j+j^2-3j)(-j^2-2j) = -3j\big((1+j)-2j\big),$$

et donc :

$$\boxed{\det V = 3j(j-1).}$$

On en déduit donc que : $\det V \neq 0$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{V \text{ est inversible.}}$$

Le calcul de V^2 donne :

$$V^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3I_3Q = 3Q,$$

car on reconnaît la matrice $3I_3$ sur laquelle on a permuté les colonnes 2 et 3. Or, bien sûr, $Q^2 = I_3$ et donc : $Q = Q^{-1}$. On en déduit donc :

$$V^2Q = 3Q^2 = 3I_3, \qquad \text{donc :} \qquad V\left(\frac{1}{3}VQ\right) = I_3.$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{V^{-1} = \frac{1}{3}VQ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}.}$$

14. Puisque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}, \qquad \text{alors :} \qquad \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = V^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_k+\beta_k+\gamma_k \\ \alpha_k+j^2\beta_k+j\gamma_k \\ \alpha_k+j\beta_k+j^2\gamma_k \end{pmatrix}.$$

Comme les suites (α_k), (β_k) et (γ_k) sont convergentes vers respectivement $a_0+b_0+c_0$, 0 et 0, on en déduit, d'après les opérations sur les limites, que :

$$\boxed{\text{les suites } (a_k),\ (b_k) \text{ et } (c_k) \text{ convergent toutes vers } a_0+b_0+c_0.}$$

Etude d'une application linéaire

15. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $M, N \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$. Alors :

$$\varphi(\lambda M+\mu N) = V^{-1}(\lambda M+\mu N)V = V^{-1}(\lambda M)V+V^{-1}(\mu N)V = \lambda V^{-1}MV+\mu V^{-1}NV = \lambda\varphi(M)+\mu\varphi(N),$$

et :

$$\varphi(MN) = V^{-1}(MN)V = (V^{-1}MV)(V^{-1}NV) = \varphi(M)\varphi(N).$$

Donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est linéaire et : } \forall (M,N) \in \big(\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})\big)^2, \quad \varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N).}$$

16. On a :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}), \quad \psi \circ \varphi(M) = \psi(V^{-1}MV) = V(V^{-1}MV)V^{-1} = I_3 M I_3 = M,$$

et on en déduit que $\psi \circ \varphi = Id_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})}$. De même, on a aussi : $\varphi \circ \psi = Id_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})}$, et donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est bijective et : } \varphi^{-1} = \psi.}$$

17. On obtient les égalités suivantes :

$$A_{(p,q)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{(p,q)} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q+jp \\ jq+j^2p \\ p+j^2q \end{pmatrix} = \frac{q+jp}{p+q} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{et : } \quad A_{(p,q)} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q+j^2p \\ j^2q+jp \\ p+jq \end{pmatrix} = \frac{q+j^2p}{p+q} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}.$$

18. La matrice inversible V est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (1,1,1)$, $\varepsilon_2 = (1, j, j^2)$ et $\varepsilon_3 = (1, j^2, j)$. L'endomorphisme φ est l'endomorphisme de changement de base correspondant, de sorte que $\varphi\big(A_{(p,q)}\big)$ représente la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à $A_{(p,q)}$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Comme on a les égalités : $A_{(p,q)}(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $A_{(p,q)}(\varepsilon_2) = \dfrac{q+jp}{p+q}\varepsilon_2$ et : $A_{(p,q)}(\varepsilon_3) = \dfrac{q+j^2p}{p+q}\varepsilon_3$, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi\big(A_{(p,q)}\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q+jp}{p+q} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q+j^2p}{p+q} \end{pmatrix} = D.}$$

19. Soient $p, q, p', q' \in \,]0, +\infty[$. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\varphi\big(A_{(p,q)}.A_{(p',q')}\big) &= \varphi\big(A_{(p,q)}\big).\varphi\big(A_{(p',q')}\big) && \text{d'après } \mathbf{15.} \\
&= D.D' && \text{matrices diagonales dont la forme est donnée en } \mathbf{18.} \\
&= D'.D && \text{d'après la commutatvité des matrices diagonales} \\
&= \varphi\big(A_{(p',q')}\big).\varphi\big(A_{(p,q)}\big) \\
&= \varphi\big(A_{(p',q')}.A_{(p',q')}\big)
\end{aligned}$$

En compposant à gauche avec φ^{-1}, on obtient donc : $A_{(p,q)}.A_{(p',q')} = A_{(p',q')}.A_{(p,q)}$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{deux matrices quelconques de l'ensemble } \left\{A_{(p,q)} | (p,q) \in \big(]0, +\infty[\big)^2\right\} \text{ commutent.}}$$

20. D'après ce qui précède on peut écrire :

$$\varphi\big(A_{(1,n)} ... A_{(1,2)}.A_{(1,1)}\big) = \varphi\big(A_{(1,n)}\big) ... \varphi\big(A_{(1,2)}\big).\varphi\big(A_{(1,1)}\big) = \Delta_n ... \Delta_2 \Delta_1,$$

où, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la matrice Δ_k est la matrice diagonale : $diag\left(1, \dfrac{k+j}{k+1}, \dfrac{k+j^2}{k+1}\right)$. On a donc :

$$\Delta_n ... \Delta_2 \Delta_1 = D_n = diag\left(1, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1}\right).$$

Donc, comme précédemment, en composant à gauche par φ^{-1}, on obtient :

$$\boxed{A_{(1,n)}...A_{(1,2)}.A_{(1,1)} = VD_nV^{-1}.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons : $u_n = \left|\prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}\right|$. On a :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \left|\frac{k+j}{k+1}\right| = \left|\frac{k+j}{k}\right| \cdot \frac{k}{k+1} = \left|1+\frac{j}{k}\right| \cdot \frac{k}{k+1} \leqslant \frac{k}{k+1},$$

d'après l'inégalité admise dans l'énoncé. On en déduit donc que :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n} \quad \text{par télescopie.}$$

On en déduit donc, d'après le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Le raisonnement étant exactement le même pour $v_n = \left|\prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1}\right|$, on en déduit donc que :

$$\boxed{\text{les suites } \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1} \text{ et } \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1} \text{ convergent vers 0.}}$$

Remarque : On peut démontrer les inégalités admises dans l'énoncé comme suit :

$$1+\frac{j}{k} = 1 + \frac{1}{2k}\big(-1+i\sqrt{3}\big) = \frac{(2k-1)+i\sqrt{3}}{2k},$$

donc :

$$\left|1+\frac{j}{k}\right|^2 = \frac{(2k-1)^2+3}{4k^2} = \frac{4k^2-4k+4}{4k^2} = \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \leqslant 1,$$

car $k \in \mathbb{N}^*$. On fait de même pour l'autre inégalité.

Problème 2.

Etude d'une fonction

21. Pour $x \in]0,+\infty[$, on écrit $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right)$. On peut donc calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$, donc par produit : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x}\ln x = -\infty$, et par composée :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 0.}$$

- Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1.}$ On en déduit que la droite d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et composée de fonctions qui le sont avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right) = \frac{1-\ln x}{x^2}\exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right).$$

On en déduit donc le tableau suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ 0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

22. On a vu à la question précédente que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$. Donc :

$$\boxed{\text{on peut prolonger } f \text{ par continuité en } 0 \text{ en posant : } f(0) = 0.}$$

23. Calculons le taux d'accroissement de f en 0 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x} = x^{\frac{1}{x}-1} = \exp\left[\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln x\right] = \exp\left(\frac{1-x}{x}\ln x\right).$$

Or, comme à la question **21.**, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1-x}{x}\ln x = -\infty$ et donc :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$

On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et que : } f'(0) = 0.}$$

24. f est continue et strictement croissante de $]0,\mathrm{e}]$ sur $[0,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}]$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est une bijection de }]0,\mathrm{e}] \text{ sur } [0,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}].}$$

25. Puisque f est continue, sa bijection réciproque l'est aussi. De plus, f étant dérivable sur $]0,\mathrm{e}]$, f^{-1} est dérivable partout où ne s'annule pas $f'\circ f^{-1}$. Or, f' s'annule en $\mathrm{e} = f^{-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)$. Donc :

$$\boxed{f^{-1} \text{ est continue sur }]0,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}], \text{ et dérivable sur }]0,\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}[.}$$

Etude d'une suite

26. Si $x=1$, alors : $\forall n\in\mathbb{N}, t_{n+1} = \Phi_1(t_n) = 1^{t_n} = 1$ et $t_0 = 1$. Donc :

$$\boxed{\text{Si } x=1, \text{ alors la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante et converge vers } h(1)=1.}$$

27. Supposons que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La fonction Φ_x étant continue sur son domaine de définition, le théorème du point fixe indique qu'on doit avoir :

$$\boxed{h(x) = \Phi_x\big(h(x)\big),}$$

c'est-à-dire que : $h(x) = x^{h(x)}$, ou encore :

$$h(x)^{\frac{1}{h(x)}} = x, \qquad \text{soit : } \qquad \boxed{f\big(h(x)\big) = x.}$$

28. Soit $x > 1$. Alors : $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_x(t) = x^t = \mathrm{e}^{t \ln x}$. Ainsi, Φ_x est la composée de la fonction linéaire : $t \mapsto t \ln x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car $\ln x > 0$), et de la fonction exponentielle strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc,

$$\boxed{\text{si } x > 1, \text{ alors } \Phi_x \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

29. • **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a : $t_1 = Q_x(1) = x^1 = x > 1 = t_0$. La propriété est donc initialisée.

• **Hérédité** : Supposons que $t_{n+1} > t_n$ pour un entier n donné quelconque. Alors, puisque Φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\Phi_x\big(t_{n+1}\big) > \phi_x(t_n), \qquad \text{soit :} \qquad t_{n+2} > t_{n+1}.$$

La propriété est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{si } x > 1, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n < t_{n+1}.}$$

30. • **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a : $t_0 = 1 \leqslant \mathrm{e}$. La propriété est donc initialisée.

• **Hérédité** : Supposons que $t_n \leqslant \mathrm{e}$ pour un entier n donné quelconque. Alors, puisque Φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\Phi_x(t_n) \leqslant \Phi_x(\mathrm{e}) = x^{\mathrm{e}}, \qquad \text{d'où :} \qquad t_{n+1} \leqslant \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\right)^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}\,.$$

La propriété est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{si } x \in \,]1, \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}[, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \leqslant \mathrm{e}.}$$

Ainsi, d'après la **29.**, la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée par e. Donc :

$$\boxed{\text{si } x \in \,]1, \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}[, \text{ alors } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

31. Soit $x > \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ et supposons que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $h(x)$. D'après **27.**, on doit avoir : $f\big(h(x)\big) = x > \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$. Or, $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ est le maximum de f, donc on arrive à une contradiction. Donc, la suite $suite[t]$ ne converge pas. Comme elle est strictement croissante d'après **29.**, on en déduit que :

$$\boxed{\text{si } x > \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}, \text{ alors } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

32. Comme en **28.**, Φ_x est la composée de la fonction linéaire $t \mapsto t \ln x$ et de la fonction exponentielle. Cependant, puisque $x \in \,]0, 1[$, on a : $\ln x < 0$ et donc la fonction linéaire considérée est strictement décroissante. Donc :

$$\boxed{\text{si } x \in \,]0, 1[, \text{ alors } \Phi_x \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$$

Comme la composée de deux fonctions strictement décroissantes est strictement croissante, on en déduit que :

$$\boxed{\text{si } x \in \,]0, 1[, \text{ alors } \Phi_x \circ \Phi_x \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

33. • **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a : $t_1 = Q_x(1) = x^1 = x < 1 = t_0$. La propriété est donc initialisée.

• **Hérédité** : Supposons que $t_{2n+1} < t_{2n}$ pour un entier n donné quelconque. Alors, puisque $\Phi_x \circ \Phi_x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\Phi_x \circ \Phi_x\big(t_{2n+1}\big) < \Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n}), \qquad \text{soit :} \qquad t_{2n+3} < t_{2n+2}.$$

La propriété est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{si } x > 1, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_{2n+1} < t_{2n}.}$$

34. • **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a : $t_1 = x$ et $t_2 = x^x = e^{x \ln x}$. Or, $x \in]0, 1[$ donc : $\ln x < 0$ et donc : $e^{x \ln x} < e^0 = 1$. On en déduit que : $t_2 < t_0$. La propriété est donc initialisée.

• **Hérédité** : Supposons que $t_{2n+2} \leqslant t_{2n}$ pour un entier n donné quelconque. Alors, puisque $\Phi_x \circ \Phi_x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n+2}) \leqslant \Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n}), \qquad \text{d'où :} \qquad t_{2n+4} \leqslant t_{2n+2}.$$

La propriété est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{si } x \in]0,1[, \text{ alors la suite extraite } (t_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{2n+2} \leqslant t_{2n}$. Puisque Φ_x est strictement décroissante, on en déduit que : $\Phi_x(t_{2n+2}) \geqslant \Phi_x(t_{2n})$ soit : $t_{2n+3} \geqslant t_{2n+1}$. Donc :

$$\boxed{\text{si } x \in]0,1[, \text{ alors la suite extraite } (t_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

35. D'après **33.** et **34.** on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 = t_0 > t_2 > \ldots > t_{2n} > t_{2n+1} > \ldots > t_3 > t_1 = x > 0.$$

Ainsi, la suite (t_{2n}) est décroissante et minorée par t_1 : elle est donc convergente. De la même manière, la suite (t_{2n+1}) est croissante et majorée par t_0 : elle est donc aussi convergente. Enfin, $\phi_x \circ \Phi_x$ étant continue, d'après le théorème du point fixe,

$$\boxed{\text{si } x \in]0,1[, \text{ alors } (t_{2n}) \text{ et } (t_{2n+1}) \text{ convergent vers des points fixes de } \Phi_x \circ \Phi_x \text{ dans } [0,1].}$$

36. On procède par implications :

$$\frac{1}{e} \leqslant x < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leqslant \ln x < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < (\ln x)^2 \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad (\ln x)^2 x < 1,$$

et donc :

$$\boxed{g'(0) < 0.}$$

On en déduit que g' est strictement négative sur $]0, 1[$ et donc :

$$\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } [0,1].}$$

Or, $x > 0$ et $x^x = e^{x \ln x} < 1$ (car $\ln x < 0$), donc : $x^x - 1 < 0$. Comme g est continue sur $[0, 1]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réels $\alpha_x \in]0, 1[$ tel que : $g(\alpha_x) = 0$, c'est-à-dire tel que : $\Phi_x \circ \Phi_x(\alpha_x) = \alpha_x$. En d'autres termes :

$$\boxed{\Phi_x \circ \Phi_x \text{ admet un unique point fixe dans } [0,1].}$$

D'après **35.**, on en déduit que les deux suites extraites (t_{2n}) et (t_{2n+1}) convergent vers la même limite α_x, et donc :

$$\boxed{\text{si } x \in [\mathrm{e}^{-1}, 1[\text{, alors la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge (vers } \alpha_x \in\,]0,1[\text{).}}$$

37. De la même manière :

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \leqslant x < \mathrm{e}^{-1} \quad \Rightarrow \quad -\mathrm{e} \leqslant \ln x < -1 \quad \Rightarrow \quad 1 \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \ln x > \frac{1}{\mathrm{e}},$$

d'où :

$$\boxed{\beta \leqslant 0.}$$

On en déduit que g' est négative (et ne s'annule éventuellement qu'en α), donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$. On conclut alors exactement de la même manière qu'en **36.**, et donc :

$$\boxed{\text{si } x \in [\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}, \mathrm{e}^{-1}[\text{, alors la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

38. On a donc :

$$g'(p) = (\ln x)^2.\Phi_x(p).(\Phi_x \circ \Phi_x)(p) - 1 = (\ln x)^2.p.p - 1 = (p \ln x)^2 - 1 = (\ln x^p)^2 - 1.$$

Or p est le point fixe de Φ_x dans $]0, \mathrm{e}^{-1}[$, donc : $\Phi_x(p) = p$, soit : $x^p = p$. On a donc :

$$\boxed{g'(p) = (\ln p)^2 - 1.}$$

On a aussi :

$$0 < p < \mathrm{e}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \ln p < -1 \quad \Rightarrow \quad (\ln p)^2 > 1,$$

et donc :

$$\boxed{g'(p) > 0.}$$

On en déduit donc, d'après le tableau de variations de g', que $p \in\,]\gamma, \delta[$. On a donc :

x	0		γ		p		δ		1
g	x	$\searrow$	$g(\gamma)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$g(\delta)$	$\searrow$	$x^x - 1$

On a donc, d'une part : $x > 0$ et $g(\gamma) < 0$. Comme g est continue et stritement décroissante sur $[0, \gamma]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiares, il existe un unique réel $p_1 \in\,]0, \gamma[$ tel que : $g(p_1) = 0$.

D'autre part, on a aussi : $g(\delta) > 0$ et $x^x - 1 < 0$, et donc, de la même manière, il existe un unique réel $p_2 \in\,]\delta, 1[$ tel que : $g(p_2) = 0$.

Enfin, sur $[\gamma, \delta]$, 0 possède aussi un unique antécédent par g : c'est p.

Donc :

$$\boxed{\text{si } x \in\,]0, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}[\text{, alors } \Phi_x \circ \Phi_x \text{ possède trois points fixes } p_1,\ p \text{ et } p_2 \text{ avec : } 0 < p_1 < \gamma < p < \delta < p_2 < 1.}$$

39. • **Initialisation** : pour $n = 0$, on a : $t_0 = 1 \geqslant p_2$. La propriété est initialisée.

• **Hérédité** : on suppose que $t_{2n} \geqslant p_2$. pour un entier n donné quelconque. Alors, puisque $\Phi_x \circ \Phi_x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\Phi_x \circ \Phi_x(t_{2n}) \geqslant \Phi_x \circ \Phi_x(p_2) \quad \text{soit :} \quad t_{2n+2} \geqslant p_2.$$

La propriété est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \geqslant t_{2n} \geqslant p_2.}$$

On en déduit que la suite (t_{2n}) est décroissante minorée par p_2. Or, d'après **35.**, elle converge vers un point fixe de $\Phi_x \circ \Phi_x$. On en déduit donc que ce point fixe appartient à l'intervalle $[p_2, 1]$: c'est donc p_2. Donc :

$$\boxed{\text{si } x \in]0, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}[, \text{ alors la suite extraite } (t_{2n}) \text{ converge vers } p_2.}$$

40. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $p < t_{2n_0+1}$. Alors, puisque Φ_x est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on a : $\Phi_x(p) > \Phi_x(t_{2n_0+1})$, soit : $p > t_{2n_0+2}$. Or ceci est en contradiction avec **39.** car on devrait avoir $t_{2n_0+2} \geqslant p_2$ avec $p_2 > p$. On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_{2n+1} \leqslant p.}$$

On en déduit donc que la suite extraite (t_{2n+1}) converge vers p ou vers p_1. Mais comme $t_{2n})$ converge vers $p2$, on en conclut que :

$$\boxed{\text{si } x \in]0, \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}[, \text{ alors la suite } (t_n) \text{ diverge.}}$$