Concours commun des Ecoles des Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes

Correction de l'épreuve spécifique MPSI ; 2008

Olivier HALGAND

Problème 1.

Etude d'une inégalité

1. Par équivalences, en considérant $x = \mathcal{R}\mathrm{e}(a)$ et $y = \mathcal{I}\mathrm{m}(a)$:

$$|a| = \mathcal{R}\mathrm{e}(a) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2 = x^2 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases},$$

d'où :

$$\boxed{|a| = \mathcal{R}\mathrm{e}(a) \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathbb{R}_+.}$$

2. On a : $\forall z, \omega \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \big(|z|+|\omega|\big)^2 - |z+\omega|^2 &= |z|^2 + 2|z|\,|\omega| + |\omega|^2 - (z+\omega)\big(\overline{z+\omega}\big) \\ &= z\overline{z} + 2|z|\,|\omega| + \omega\overline{\omega} - z\overline{z} - z\overline{\omega} - \overline{z}\omega - \omega\overline{\omega} \\ &= 2|z|\,|\omega| - \big(z\overline{\omega} + \overline{z\overline{\omega}}\big) \\ &= 2|z|\,|\omega| - 2\mathcal{R}\mathrm{e}\big(z\overline{\omega}\big) \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\forall z, \omega \in \mathbb{C}, \quad \big(|z|+|\omega|\big)^2 - |z+\omega|^2 = 2\Big(|z|\,|\omega| - \mathcal{R}\mathrm{e}\big(z\overline{\omega}\big)\Big).}$$

3. On sait que : $\forall a \in \mathbb{C},\ |a| \geqslant \mathcal{R}\mathrm{e}(a)$. Donc : $\forall z, \omega \in \mathbb{C},\ |z\overline{\omega}| \geqslant \mathcal{R}\mathrm{e}\big(z\overline{\omega}\big)$. On en déduit donc que :

$$\big(|z|+|\omega|\big)^2 - |z+\omega|^2 = 2\Big(|z|\,|\omega| - \mathcal{R}\mathrm{e}\big(z\overline{\omega}\big)\Big) \geqslant 0,$$

donc :

$$\big(|z|+|\omega|\big)^2 - |z+\omega|^2 \geqslant 2\Big(|z|\,|\omega| - \mathcal{R}\mathrm{e}\big(z\overline{\omega}\big)\Big),$$

et puisque ce sont des nombres réels positifs, on en déduit :

$$\boxed{\forall z, \omega \in \mathbb{C}, \quad |z|+|\omega| \geqslant |z+\omega|.}$$

De plus, d'après **2.**, il y a égalité si, et seulement si : $|z|\,|\omega| = \mathcal{R}\mathrm{e}\big(z\overline{\omega}\big)$, c'est-à-dire, d'après **1.**, si, et seulement si : $z\overline{\omega} \in \mathbb{R}_+$. Or, si $\omega = 0$ alors c'est évident, et si $\omega \neq 0$ on obtient :

$$z\overline{\omega} = \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad \Leftrightarrow \quad z\overline{\omega}\omega = \lambda\omega \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\lambda}{|\omega|^2}\,\omega, \quad \text{avec : } \frac{\lambda}{|\omega|^2} \in \mathbb{R}_+.$$

Finalement, il y a égalité si, et seulement si$z$ et ω sont positivement proportionnels, ou, en termes géométriques :

$$\boxed{|z+\omega| = |z|+|\omega| \quad \Leftrightarrow \quad M(z) \text{ et } \Omega(\omega) \text{ sont situés sur une même demi-droite issue de l'origine.}}$$

La notion de $(p : q)$ point

4. Par équivalences :

$$\frac{z-a}{b-z}=\frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad q(z-a)=p(b-z) \quad \Leftrightarrow \quad qz+pz=qa+pb,$$

et comme $p+q\neq 0$ par hypothèse, on obtient l'unique solution :

$$\boxed{\frac{z-a}{b-z}=\frac{p}{q} \quad \Leftrightarrow \quad z=\frac{qa+pb}{p+q},}$$

5. Pour $\alpha\in\,]0,+\infty[$, alors αp et αq sont encore des réels strictement positifs et : $\dfrac{\alpha p}{\alpha q}=\dfrac{p}{q}$, et donc

$$\boxed{\text{le } (p : q) \text{ point de } A \text{ à } B \text{ est égal au } (\alpha p : \alpha q) \text{ point de } A \text{ à } B.}$$

:

6. D'après **4.**, le $(1 : 1)$ de $A(a)$ à $B(b)$ a pour affixe $\dfrac{a+b}{2}$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{le } (1 : 1) \text{ point de } A \text{ à } B \text{ est le milieu du segment } [AB].}$$

7. Si on note x et y les affixes respectives de X et Y, alors, d'après **4.**, on a :

$$x=\frac{qa+pb}{p+q} \quad \text{et :} \quad y=\frac{qa+pc}{p+q}.$$

On en déduit que :

$$y-x=\frac{pc-pb}{p+q}=\frac{p}{p+q}(c-b), \quad \text{soit :} \quad \overrightarrow{XY}=\frac{p}{p+q}\overrightarrow{BC}.$$

ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{XY}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, et donc :

$$\boxed{\text{les droites } (XY) \text{ et } (BC) \text{ sont parallèles.}}$$

La notion de $(p : q)$ sous-triangle

8. Evidemment :

$$\boxed{\text{l'affixe de l'isobarycentre du triangle } \Delta(ABC) \text{ est } \frac{a+b+c}{3}.}$$

9. L'isobarycentre du triangle $\Delta(A'B'C')$ a pour affixe :

$$\frac{a'+b'+c'}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{qa+pb}{p+q}+\frac{qb+pc}{p+q}+\frac{qc+pa}{p+q}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{(p+q)(a+b+c)}{p+q}\right)=\frac{a+b+c}{3}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{les triangles } \Delta(ABC) \text{ et } \Delta(A'B'C') \text{ ont le même isobarycentre.}}$$

Etude de suites

10. Comme à la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = \frac{qa_k + pb_k}{p+q},\ b_{k+1} = \frac{qb_k + pc_k}{p+q},\ c_{k+1} = \frac{qc_k + pa_k}{p+q},$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ 0 & q & p \\ p & 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}.}$$

11. • Comme en **9.**, on a les égalités : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} + c_{k+1} = \frac{(p+q)(a_k + b_k + c_k)}{p+q} = a_k + b_k + c_k = \alpha_k.$$

Donc, la suite (α_k) est géométrique de raison 1, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{la suite } (\alpha_k) \text{ est constante et converge vers } a_0 + b_0 + c_0.}$$

• De même, en utilisant le fait que $j^3 = 1$: $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} &= a_{k+1} + jb_{k+1} + j^2 c_{k+1} = \frac{(qa_k + pb_k) + j(qb_k + pc_k) + j^2(qc_k + pa_k)}{p+q} \\ &= \frac{(q + j^2 p)a_k + (p + jq)b_k + (jp + j^2 q)c_k}{p+q} = \frac{q + j^2 p}{p+q}(\underbrace{a_k + jb_k + j^2 c_k}_{\beta_k}). \end{aligned}$$

Donc, la suite (β_k) est géométrique de raison $\dfrac{q + j^2 p}{p+q}$. Or, q et $j^2 p$ ne sont pas positivement proportionnels, donc, d'après **3.** :

$$\left| \frac{q + j^2 p}{p+q} \right| = \frac{|q + j^2 p|}{|p+q|} < \frac{|q| + |j^2 p|}{p+q} = \frac{q+p}{p+q} = 1.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (\beta_k) \text{ est géométrique de raison } \frac{q + j^2 p}{p+q} \text{ et converge vers } 0.}$$

• De la même manière, toujours en utilisant le fait que $j^3 = 1$: $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} &= a_{k+1} + j^2 b_{k+1} + jc_{k+1} = \frac{(qa_k + pb_k) + j^2(qb_k + pc_k) + j(qc_k + pa_k)}{p+q} \\ &= \frac{(q + jp)a_k + (p + j^2 q)b_k + (j^2 p + jq)c_k}{p+q} = \frac{q + jp}{p+q}(\underbrace{a_k + j^2 b_k + jc_k}_{\gamma_k}). \end{aligned}$$

Donc, la suite (γ_k) est géométrique de raison $\dfrac{q + jp}{p+q}$. Or, q et jp ne sont pas positivement proportionnels, donc, d'après **3.** :

$$\left| \frac{q + jp}{p+q} \right| = \frac{|q + jp|}{|p+q|} < \frac{|q| + |jp|}{p+q} = \frac{q+p}{p+q} = 1.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (\gamma_k) \text{ est géométrique de raison } \frac{q + jp}{p+q} \text{ et converge vers } 0.}$$

12. La matrice Q est une matrice de permutation. Quand on multiplie une matrice B à gauche par Q, cela revient à permuter les colonnes 2 et 3 de B ; quand on multiplie une matrice B à droite par Q, cela revient à permuter les lignes 2 et 3 de B. Donc, ici :

$$\boxed{\text{la matrice } C \text{ est obtenue à partir de la matrce } B \text{ en permutant ses colonnes 2 et 3.}}$$

13. On a, compte-tenu de l'égalité $1 + j + j^2 = 0$: On peut aussi remarquer que det V = V(1, j, j²)

$$\begin{aligned}\det V &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & j-1 & j^2-1 \\ 0 & j^2-1 & j-1 \end{vmatrix} = (j-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & j+1 \\ 0 & j+1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (j^2 - 2j + 1)\big[1 - (j+1)^2\big] = (1 + j + j^2 - 3j)(-j^2 - 2j) = -3j\big((1+j) - 2j\big),\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\det V = 3j(j-1).}$$

On en déduit donc que : $\det V \neq 0$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{V \text{ est inversible.}}$$

Le calcul de V^2 donne :

$$V^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3I_3Q = 3Q,$$

car on reconnaît la matrice $3I_3$ sur laquelle on a permuté les colonnes 2 et 3. Or, bien sûr, $Q^2 = I_3$ et donc : $Q = Q^{-1}$. On en déduit donc :

$$V^2Q = 3Q^2 = 3I_3, \qquad \text{donc :} \qquad V\left(\frac{1}{3}VQ\right) = I_3.$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{V^{-1} = \frac{1}{3}VQ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}.}$$

14. Puisque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}, \qquad \text{alors :} \qquad \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_k + \beta_k + \gamma_k \\ \alpha_k + j^2\beta_k + j\gamma_k \\ \alpha_k + j\beta_k + j^2\gamma_k \end{pmatrix}.$$

Comme les suites (α_k), (β_k) et (γ_k) sont convergentes vers respectivement $a_0 + b_0 + c_0$, 0 et 0, on en déduit, d'après les opérations sur les limites, que :

$$\boxed{\text{les suites } (a_k),\ (b_k) \text{ et } (c_k) \text{ convergent toutes vers } a_0 + b_0 + c_0.}$$

Etude d'une application linéaire

15. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $M, N \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$. Alors :

$$\varphi(\lambda M + \mu N) = V^{-1}(\lambda M + \mu N)V = V^{-1}(\lambda M)V + V^{-1}(\mu N)V = \lambda V^{-1}MV + \mu V^{-1}NV = \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N),$$

et :

$$\varphi(MN) = V^{-1}(MN)V = (V^{-1}MV)(V^{-1}NV) = \varphi(M)\varphi(N).$$

Donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est linéaire et : } \forall (M,N) \in \big(\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})\big)^2, \quad \varphi(MN) = \varphi(M)\varphi(N).}$$

16. On a :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}), \quad \psi \circ \varphi(M) = \psi(V^{-1}MV) = V(V^{-1}MV)V^{-1} = I_3 M I_3 = M,$$

et on en déduit que $\psi \circ \varphi = Id_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})}$. De même, on a aussi : $\varphi \circ \psi = Id_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})}$, et donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est bijective et : } \varphi^{-1} = \psi.}$$

17. On obtient les égalités suivantes :

$$A_{(p,q)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{(p,q)} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q+jp \\ jq+j^2p \\ p+j^2q \end{pmatrix} = \frac{q+jp}{p+q} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{et : } \quad A_{(p,q)} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q+j^2p \\ j^2q+jp \\ p+jq \end{pmatrix} = \frac{q+j^2p}{p+q} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}.$$

18. La matrice inversible V est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (1,1,1)$, $\varepsilon_2 = (1,j,j^2)$ et $\varepsilon_3 = (1,j^2,j)$. L'endomorphisme φ est l'endomorphisme de changement de base correspondant, de sorte que $\varphi\big(A_{(p,q)}\big)$ représente la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à $A_{(p,q)}$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Comme on a les égalités : $A_{(p,q)}(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $A_{(p,q)}(\varepsilon_2) = \dfrac{q+jp}{p+q}\varepsilon_2$ et : $A_{(p,q)}(\varepsilon_3) = \dfrac{q+j^2p}{p+q}\varepsilon_3$, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi\big(A_{(p,q)}\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q+jp}{p+q} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q+j^2p}{p+q} \end{pmatrix} = D.}$$

19. Soient $p, q, p', q' \in \,]0, +\infty[$. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varphi\big(A_{(p,q)}.A_{(p',q')}\big) &= \varphi\big(A_{(p,q)}\big).\varphi\big(A_{(p',q')}\big) && \text{d'après } \mathbf{15.} \\ &= D.D' && \text{matrices diagonales dont la forme est donnée en } \mathbf{18.} \\ &= D'.D && \text{d'après la commutatvité des matrices diagonales} \\ &= \varphi\big(A_{(p',q')}\big).\varphi\big(A_{(p,q)}\big) \\ &= \varphi\big(A_{(p',q')}.A_{(p',q')}\big) \end{aligned}$$

En compposant à gauche avec φ^{-1}, on obtient donc : $A_{(p,q)}.A_{(p',q')} = A_{(p',q')}.A_{(p,q)}$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{deux matrices quelconques de l'ensemble } \left\{A_{(p,q)} | (p,q) \in \big(]0,+\infty[\big)^2\right\} \text{ commutent.}}$$

20. D'après ce qui précède on peut écrire :

$$\varphi\big(A_{(1,n)}...A_{(1,2)}.A_{(1,1)}\big) = \varphi\big(A_{(1,n)}\big)...\varphi\big(A_{(1,2)}\big).\varphi\big(A_{(1,1)}\big) = \Delta_n...\Delta_2\Delta_1,$$

où, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la matrice Δ_k est la matrice diagonale : $diag\left(1, \dfrac{k+j}{k+1}, \dfrac{k+j^2}{k+1}\right)$. On a donc :

$$\Delta_n...\Delta_2\Delta_1 = D_n = diag\left(1, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}, \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1}\right).$$

Donc, comme précédemment, en composant à gauche par φ^{-1}, on obtient :

$$\boxed{A_{(1,n)}...A_{(1,2)}.A_{(1,1)} = VD_nV^{-1}.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons : $u_n = \left|\prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1}\right|$. On a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \left|\frac{k+j}{k+1}\right| = \left|\frac{k+j}{k}\right| \cdot \frac{k}{k+1} = \left|1 + \frac{j}{k}\right| \cdot \frac{k}{k+1} \leqslant \frac{k}{k+1},$$

d'après l'inégalité admise dans l'énoncé. On en déduit donc que :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n} \quad \text{par télescopie.}$$

On en déduit donc, d'après le théorème des gendarmes, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Le raisonnement étant exactement le même pour $v_n = \left|\prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1}\right|$, on en déduit donc que :

$$\boxed{\text{les suites } \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j}{k+1} \text{ et } \prod_{k=1}^{n} \frac{k+j^2}{k+1} \text{ convergent vers 0.}}$$

Remarque : On peut démontrer les inégalités admises dans l'énoncé comme suit :

$$1 + \frac{j}{k} = 1 + \frac{1}{2k}\big(-1 + i\sqrt{3}\big) = \frac{(2k-1) + i\sqrt{3}}{2k},$$

donc :

$$\left|1 + \frac{j}{k}\right|^2 = \frac{(2k-1)^2 + 3}{4k^2} = \frac{4k^2 - 4k + 4}{4k^2} = \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \leqslant 1,$$

car $k \in \mathbb{N}^*$. On fait de même pour l'autre inégalité.